Conceptos de gradiente y de derivada direccional

Roberto C. Redondo Melchor, Norberto Redondo Melchor, Félix Redondo Quintela[1]
Universidad de Salamanca.
20 de septiembre de 2012
v1.1: *28 de enero de 2013*

Gradiente es la generalización de derivada a funciones de más de una variable. Es útil en física e ingeniería. También lo es la derivada direccional, con la que el gradiente está relacionado. Para facilitar la comprensión de ambos conceptos, nos ocupamos de ellos aquí pensando principalmente en sus aplicaciones.

En este comentario utilizaremos ideas del artículo *Conceptos de derivada y de diferencial* de esta misma sección *Comentarios Técnicos*, por lo que puede convenir su previa lectura.

1. Derivadas parciales

La derivada de una función real *y* de una variable real *x* en un punto x_0 es lo que varía *y* por cada unidad que varía *x* en los entornos más pequeños de x_0. Se escribe

$$y'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0}$$

En funciones reales de más de una variable real se define de la misma forma la derivada para cada una de esas variables. Por ejemplo, para la función de tres variables $f(x,y,z)$ la expresión

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y,z)}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} \tag{1}$$

designa la derivada de $f(x,y,z)$ respecto a *x* en $x=x_0$, cuya definición es

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y,z)}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y,z)-f(x_0,y,z)}{h}$$

---

[1] Lucía Redondo Cortés ha hecho la figura del texto.

O sea, se considera x como única variable. Esa derivada es lo que varía $f(x,y,z)$ por cada unidad que varía x en los entornos más pequeños de x_0.

Para poner más claramente de manifiesto que $f(x,y,z)$ es función de más de una variable, en vez de escribir esa derivada como en (1), se escribe

$$\left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)_{x_0}$$

con la letra delta ∂ del alfabeto griego en lugar de d. Y se lee *derivada parcial de* $f(x,y,z)$ *respecto a x*. Por tanto, *derivada parcial de la función* $f(x,y,z)$ *respecto a x en* x_0 *es*

$$\left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)_{x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y,z)-f(x_0,y,z)}{h}$$

Si ese límite existe es una función del resto de las variables, en este caso de y, z. Y es lo que varía $f(x,y,z)$ por cada unidad que varía x en los entornos más pequeños de x_0 para cada par de valores (y,z).

La *función derivada parcial* de $f(x,y,z)$ respecto a x da la derivada parcial de $f(x,y,z)$ para cada valor de x:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$$

y es otra función de x, y, z.

Se ve que la derivada parcial respecto a una variable se obtiene como la derivada de una función cuya única variable fuera la variable respecto a la que se deriva. Por eso las reglas de derivación son las mismas que para una sola variable, considerando las demás como constantes.

En física e ingeniería aparecen de continuo funciones reales de más de una variable real. Entre ellas magnitudes del espacio ordinario. Por ejemplo, la temperatura tiene un valor en cada punto del espacio. Es, por tanto, una función real $T(x,y,z)$ de las coordenadas de cada punto del espacio, una función real de tres variables reales. El potencial eléctrico tiene también un valor en cada punto del espacio. Ese valor es un número real. Es, por tanto, una función real $V(x,y,z)$ de las coordenadas de los puntos del espacio[2].

[2] Las magnitudes que son funciones reales se llaman en física magnitudes *escalares*. Por tanto la temperatura y el potencial eléctrico de puntos del espacio son magnitudes escalares.

Ejemplo:

Si $f(x,y,z) = 3x^2yz + 5xz + 6$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xyz + 5z; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=1} = 6yz + 5z; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,2,-1)} = -5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2z; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=1} = 3x^2z; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,2,-1)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y + 5x; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=1} = 3x^2y + 5x; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(0,2,-1)} = 0$$

La columna de la derecha expresa que en el punto (0, 2, -1) la función *f* disminuye 5 unidades por cada unidad que aumenta *x*, y que en ese punto *f* no varía si varían *y* y *z*.

Diferencial

Al hallar la derivada parcial de una función respecto a una variable en un punto, el resto de las variables se consideran constantes. Por tanto, la diferencial en ese punto respecto a la variable que se deriva es una diferencial de una función de una variable. Se llama *diferencial parcial respecto a esa variable* o, simplemente, *diferencial respecto a esa variable* en ese punto. Por ejemplo, la diferencial de $f(x,y,z)$ respecto a *x* en un punto (x_0,y,z) es

$$\mathrm{d}f)_{x_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0} \mathrm{d}x \qquad (2)$$

Es la diferencial de *f* en x_0 considerando *x* como única variable. Es una función lineal de d*x* para cada par de valores (y,z). Su valor para $\mathrm{d}x = 1$ es el de la derivada parcial de la función en x_0 para cada par de valores (y,z).

La representación gráfica de $f(x,y,z)$ como función solo de *x*, es una curva del plano para cada par de valores (y,z). La representación gráfica de (2), como la de toda diferencial de una función real de una variable real, es una recta de dirección tangente a esa curva en el punto $x = x_0$. Su pendiente es $\partial f/\partial x)_{x_0}$.

Por tanto, la diferencial respecto a una variable *x* es una aproximación de lo que varía *f* si se incrementa *x* una cantidad d*x*. Exactamente lo mismo que la diferencial de una función real de una sola variable real. Y lo mismo para el resto de las diferenciales respecto a las demás variables de *f*.

La suma de las diferenciales de *f* respecto a varias variables se llama *diferencial total* de *f* respecto a esas variables. Por ejemplo, la diferencial de *f* respecto a *x* e *y* en (x_0, y_0) es

$$\mathrm{d}f\Big)_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big)_{(x_0,y_0)} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)_{(x_0,y_0)} \mathrm{d}y$$

Da idea de lo que se incrementa *f* si se incrementa *x* una cantidad d*x* e *y* una cantidad d*y* en entornos de (x_0, y_0), manteniendo *z* constante. Es una función lineal cuyas variables son d*x* y d*y* que aproxima *f* en entornos de (x_0, y_0) para cada valor fijo de *z*.

La diferencial total respecto a las tres variables en (x_0, y_0, z_0) es

$$\mathrm{d}f\Big)_{(x_0,y_0,z_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big)_{(x_0,y_0,z_0)} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)_{(x_0,y_0,z_0)} \mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big)_{(x_0,y_0,z_0)} \mathrm{d}z \qquad (3)$$

Da idea de lo que se incrementa *f* si se incrementan *x* una cantidad d*x*, si se incrementa *y* una cantidad d*y*, y *z* una cantidad dz a partir de (x_0, y_0, z_0). Es una función lineal de variables d*x*, d*y*, d*z* que aproxima *f* en entornos de (x_0, y_0, z_0). Si está claro cuáles son las variables de una función, la expresión *diferencial total*, sin especificación de variables, designa la diferencial respecto a todas las variables. Así, (3) es la diferencial total de $f(x, y, z)$.

La diferencial en un punto de funciones reales de varias variables reales tiene la misma utilidad que la diferencial de funciones reales de una variable real: dar idea aproximada de lo que varía la función en cada punto para incrementos de las variables en entornos de esos puntos. Es una aproximación lineal de la función en los entornos de ese punto. Para conocer aproximadamente esa variación no hace falta conocer la función, sino solo las derivadas parciales en ese punto. El incremento aproximado de *f* se halla entonces con (3), sumando los incrementos aproximados debidos a cada variable. Además, como ocurre para las funciones reales de una variable real, todas la funciones que en un punto tengan las mismas derivadas parciales, tienen la misma función diferencial en ese punto.

La expresión

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

designa la diferencial de *f* en cualquier punto (*x*,*y*,*z*).

Ejemplo:

La diferencial de la función $f(x,y,z) = 3x^2yz + 5xz + 6$ es

$$\mathrm{d}f = (6xyz + 5z)\,\mathrm{d}x + \left(3x^2z\right)\mathrm{d}y + \left(3x^2y + 5x\right)\mathrm{d}z$$

Es una función lineal de las variables d*x*, d*y*, dz para cada punto (*x*,*y*,*z*).

Las diferenciales en los punto $(0,2,-1)$ y $(1,-1,-1)$ son respectivamente

$$\mathrm{d}f\big)_{(0,2,-1)} = -5\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}f\big)_{(1,-1,-1)} = \mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z$$

Es decir, fijado el punto (*x*,*y*,*z*), la diferencial es función exclusivamente de d*x*, d*y*, dz.

Para $\mathrm{d}x = 1$; $\mathrm{d}y = 8$; $\mathrm{d}z = -2$ los valores de esas diferenciales son -5 y -27.

Gradiente

Se llama gradiente en un punto de una función real de varias variables reales al conjunto ordenado de las derivadas parciales de esa función en ese punto.

Por tanto, el gradiente de una función $f(x,y,z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)} \right)$$

Se denota por ∇f. Es decir,

$$\nabla f\big)_{(x_0,y_0,z_0)} = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)} \right)$$

Cada derivada parcial en el punto (x_0, y_0, z_0) se llama *componente* del gradiente en ese punto.

La derivada en un punto de una función real de variable real informa de lo que varía la función por cada unidad que varía la variable independiente en ese punto. La misma información da el gradiente con cada una de sus componentes: informa de lo que varía la función por cada unidad que varía cada variable en el punto que se considere. Así, que el gradiente de una función $f(x,y,z)$ en el punto $(3,-2,4)$ sea $(2,0,-1)$ significa que, por cada unidad que varía *x* en los entornos más pequeños de 3 manteniéndose *y* y *z* en los valores $y = -2$ y $z = 4$, *f* varía 2; que *f* no varía si *y* varía en pequeños entornos de -2 con *x* y *z* constantes en 3 y 4; y que *f* disminuye 1 por cada unidad que se incrementa *z* en pequeños entornos de 4 con *x* e *y* en 3 y -2.

El gradiente de la función *f* en cualquier punto (*x*, *y*, *z*) se designa por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{5}$$

El símbolo ∇ se llama *nabla*[3]. Se dice que nabla es un operador[4] que, para tres variables *x*, *y*, *z* es

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Puesto delante de una función *f* real de tres variables reales indica (5); o sea, da el gradiente de *f*.

∇f se lee *gradiente de f*, y *nabla de f*.

Gradiente de *f* se designa también con grad*f*, de manera que se puede escribir

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Si *f* es función de una sola variable, su gradiente en cada punto solo tiene una componente, que es la derivada de *f* en ese punto.

Como cada derivada parcial en un punto de una función es un número real, el gradiente en cada punto es un conjunto ordenado de números reales; o sea, un vector de dimensión el número de variables de la función *f*. Así $\nabla f\left(x, y, z\right)$ es un vector de dimensión 3 en cada punto $\left(x, y, z\right)$. Por eso el gradiente de $f\left(x, y, z\right)$ se escribe también

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \right)$$

[3] Parece que el nombre se debe al nombre griego de un instrumento musical parecido a un arpa que tiene aproximadamente forma triangular. También parece que se lo puso Maxwell más o menos humorísticamente. Como el símbolo de la letra griega delta mayúscula es Δ, el de *nabla*, ∇, es una delta invertida.

[4] Que nabla es un operador significa que se puede relacionar con las funciones de diferentes formas. La única relación que se utiliza en este artículo consiste en ponerlo delante de una función real de varias variables reales. Puesto así significa gradiente de esa función. Por ejemplo, $\nabla f\left(x, y, z\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$.

El gradiente de f es, por tanto, una función vectorial[5] de las mismas variables reales que f.

Si una función vectorial es el gradiente de una función escalar, la función escalar se llama *potencial* de la función vectorial. Por tanto la función f es el potencial de la función vectorial grad$f$= ∇f .

Con la nueva notación resulta que el operador ∇ se puede escribir con cualquiera de los tres miembros de la igualdad

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Y el gradiente de f con cualquiera de los siguientes cuatro miembros:

$$\mathrm{grad}f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \right)$$

De la constatación de que el gradiente es un vector surgen algunas interpretaciones interesantes. Por ejemplo, consideremos un vector cualquiera

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{dz}) = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{dz}\boldsymbol{k}$$

El producto escalar del gradiente por ese vector es

$$\nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{dz}) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{dz} = \mathrm{d}f$$

O, con la nueva notación,

$$\nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \right) \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{dz}\boldsymbol{k}) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{dz} = \mathrm{d}f$$

Es decir, *el producto escalar del gradiente en un punto de una función f por un vector cualquiera* $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{dz}) = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{dz}\boldsymbol{k}$ *es la diferencial de f en ese punto.*

Ejemplo

El gradiente de la función $f(x, y, z) = 3x^2yz + 5xz + 6$ es la función vectorial

[5] Se llama función vectorial de dimensión n a cada función cuyo conjunto de llegada es R^n. R designa el cuerpo de los números reales.

$$\nabla f = \left(6xyz + 5z, \quad 3x^2 z, \quad 3x^2 y + 5x\right)$$

Los gradientes en los puntos $(0,2,-1)$ y $(1,-1,-1)$ son, respectivamente, los vectores

$$\nabla f_{(0,2,-1)} = -5\boldsymbol{i}$$

$$\nabla f_{(1,-1,-1)} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

La función diferencial de *f* en cada punto (x, y, z) es la función de $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (6xyz + 5z)\,\mathrm{d}x + \left(3x^2 z\right)\mathrm{d}y + \left(3x^2 y + 5x\right)\mathrm{d}z$$

Las funciones diferenciales en los puntos $(0,2,-1)$ y $(1,-1,-1)$ son respectivamente

$$\mathrm{d}f_{(0,2,-1)} = \nabla f_{(0,2,-1)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -5\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}f_{(1,-1,-1)} = \nabla f_{(1,-1,-1)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z$$

Para $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = (-1, 3, -2)$, esas diferenciales valen 5 y -14.

Derivada direccional

Cada vector del espacio ordinario tiene un módulo y una dirección. Cuando se fija un vector $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$ dando valores concretos a $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, se fija su módulo y su dirección. Cada valor de la diferencial de la función *f* en un punto (x, y, z) es el producto escalar de su gradiente en ese punto por un vector d***r***, es decir,

$$\nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

En cada punto (x, y, z) el gradiente ∇f es fijo, tiene un valor concreto; pero el vector $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ puede ser cualquiera; puede tener cualquier módulo y cualquier dirección.

Ejemplo

La diferencial de $f(x, y, z) = 3x^2 yz + 5xz + 6$ en el punto $(1,-1,-1)$ es

$$\mathrm{d}f_{(1,-1,-1)} = \nabla f_{(1,-1,-1)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z$$

Su valor para el vector $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = (-1,3,-2)$ es -14. Para $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (3,2,1)$, que tiene el mismo módulo que el anterior, pero dirección distinta, la diferencial vale -1.

Hay infinitos vectores para cada dirección. Cada vector de una dirección se obtiene de cualquiera otro de esa dirección multiplicándolo por un número real. El vector más representativo de cada dirección es el vector unitario de esa dirección, que es el vector de esa dirección cuyo módulo es la unidad. Para obtener el vector unitario $\boldsymbol{u}$ de una dirección a partir de cualquier otro vector $\boldsymbol{v}$ de esa dirección hay que dividir $\boldsymbol{v}$ por su módulo. El vector

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}$$

es un vector unitario[6] de la misma dirección que d$\boldsymbol{r}$. Y como de la anterior igualdad $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, resulta que cualquier vector d$\boldsymbol{r}$ de una dirección se obtiene multiplicando el vector unitario de esa dirección por un número real λ, que es el módulo de d$\boldsymbol{r}$.

Que desde un punto (x_0, y_0, z_0) del espacio ordinario se avance la distancia λ en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{u}$ significa que al vector (x_0, y_0, z_0) se suma el vector $\lambda\boldsymbol{u}$ (Fig. 1). En efecto, como el módulo de $\boldsymbol{u}$ es la unidad, si λ vale 2 se avanza dos unidades, y si vale -0.5 se retrocede 0.5 unidades.

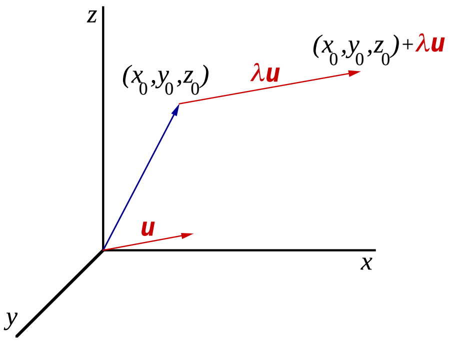

Fig. 1.- Trasladarse λ unidades en la dirección de $\boldsymbol{u}$ desde el punto (x_0, y_0, z_0) significa sumar el vector $\lambda\boldsymbol{u}$ al vector (x_0, y_0, z_0).

---

[6] En efecto, su módulo es 1, pues

$$|\boldsymbol{u}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}\right)^2} = \frac{1}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|} = 1$$

A veces interesa lo que varía una función $f(x,y,z)$ definida en el espacio ordinario por cada unidad de longitud que se avanza a partir de un punto (x_0,y_0,z_0) en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{u}$. Para hallar esa variación, nos movemos una distancia λ a partir de (x_0,y_0,z_0) en esa dirección. Eso significa pasar del punto (x_0,y_0,z_0) al punto $(x_0,y_0,z_0)+\lambda\boldsymbol{u}$. Por tanto la función ha pasado de valer $f(x_0,y_0,z_0)$ a valer $f\left[(x_0,y_0,z_0)+\lambda\boldsymbol{u}\right]$. Su incremento ha sido

$$f\left[(x_0,y_0,z_0)+\lambda\boldsymbol{u}\right]-f(x_0,y_0,z_0)$$

Y la variación media por unidad de longitud en la dirección de $\boldsymbol{u}$ es

$$\frac{f\left[(x_0,y_0,z_0)+\lambda\boldsymbol{u}\right]-f(x_0,y_0,z_0)}{\lambda}$$

Lo que varía la función en los entornos más pequeños de (x_0,y_0,z_0) por cada unidad de longitud en la dirección $\boldsymbol{u}$ se obtiene haciendo tender a cero la distancia λ que nos movemos a partir de (x_0,y_0,z_0):

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left[(x_0,y_0,z_0)+\lambda\boldsymbol{u}\right]-f(x_0,y_0,z_0)}{\lambda}$$

Si ese límite existe se llama *derivada de la función f en el punto* (x_0,y_0,z_0) *en la dirección de* $\boldsymbol{u}$. La derivada en la dirección de $\boldsymbol{u}$ en un punto cualquiera (x,y,z) se designa por $D_{\boldsymbol{u}}f$. Por tanto,

$$D_{\boldsymbol{u}}f=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left[(x,y,z)+\lambda\boldsymbol{u}\right]-f(x,y,z)}{\lambda}\tag{6}$$

Si esa derivada existe para todas las direcciones que parten de un punto, es decir, para cualquier vector unitario $\boldsymbol{u}$, existen las tres derivadas parciales de f en ese punto, y pueden obtenerse de (6) eligiendo como vector $\boldsymbol{u}$ el vector unitario en la dirección de cada eje de coordenadas. Por ejemplo, el vector unitario en la dirección de x es

$$\boldsymbol{u}=(1,0,0)$$

Y (6) queda

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left[(x,y,z)+\lambda(1,0,0)\right]-f(x,y,z)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda,y,z)-f(x,y,z)}{\lambda}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

De la misma forma para las otras variables.

Si f es función de una sola variable, entonces el vector unitario solo tiene una componente, que vale 1. Es decir, $\boldsymbol{u}=(1)$, y (6) queda

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda)-f(x)}{\lambda} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

que es la derivada de una función real de una sola variable real.

O sea, (6) es una definición muy general de derivada que incluye como casos particulares las definiciones de derivada parcial y de derivada de una función real de una variable real. La derivada definida en (6) se llama *derivada direccional*.

Gradiente y derivada direccional

La diferencial de $f(x,y,z)$

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{7}$$

es lo que varía $f(x,y,z)$ si, desde el punto (x,y,z) se pasa al punto $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$, que se obtiene sumando al vector (x,y,z) el vector $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$. La distancia que así nos movemos es el módulo de d**r**. Por tanto, si (7) se divide por $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$, resulta lo que varía *f* por cada unidad que nos movemos en la dirección de d**r**; o sea, al dividir por $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$, (7) resulta la derivada direccional $D_u f$ en la dirección del vector $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Pero, al dividir en (7) por $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$, el segundo miembro se transforma en

$$\nabla f \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|} = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = |\nabla f| \cos\alpha = D_u f \tag{8}$$

Donde $\boldsymbol{u} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} / |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ es el vector unitario en la dirección de $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, y α el ángulo que forman los vectores ∇f y **u**.

Por tanto, *la derivada* $D_{\boldsymbol{u}} f$ *de una función f en un punto en la dirección de un vector unitario **u** es el producto escalar del gradiente en ese punto por **u***:

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} \tag{9}$$

O, lo que es lo mismo, *la derivada de una función f en un punto y en una dirección es la proyección sobre esa dirección del gradiente de la función en ese punto.*

Ejemplo:

El gradiente de $f(x,y,z)=3x^2yz+5xz+6$ es

$$\nabla f=\left(6xyz+5z,\quad 3x^2z,\quad 3x^2y+5x\right)$$

La derivada en cualquier punto (x,y,z) en la dirección del vector $(1,-2,-1)$, cuyo módulo es $\sqrt{6}$, es

$$D_{\boldsymbol{u}}f=\nabla f\cdot\boldsymbol{u}=\left(6xyz+5z,\quad 3x^2z,\quad 3x^2y+5x\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)=$$
$$=\sqrt{6}xyz+\frac{5}{\sqrt{6}}z-\sqrt{6}x^2z-\sqrt{\frac{3}{2}}x^2y-\frac{5}{\sqrt{6}}x$$

Es una función que da la derivada de *f* en cada punto (x,y,z) en la dirección del vector $(1,-2,-1)$. Esa derivada en $(x,y,z)=(1,0,-1)$ es $-5\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{6}$. Significa que, por cada unidad que se avanza en pequeños entornos del punto $(1,0,-1)$ en la dirección del vector $(1,-2,-1)$, la función se incrementa $-5\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{6}\simeq-1.63$.

El producto escalar (8) o (9) es máximo si $\cos\alpha=1$; o sea, si $\alpha=0$, que significa que la dirección de ***u*** es la del gradiente[7]. Entonces (8) y (9) valen $|\nabla f|$. Por tanto, *la derivada direccional de una función en un punto es máxima en la dirección de su gradiente en ese punto, y vale el módulo de ese gradiente*. Por eso se dice que *el módulo del gradiente de una función en un punto es la derivada direccional máxima de la función en ese punto*.

Resumen

En lo anterior nos hemos referido principalmente a funciones reales de tres variables reales porque son las que más aparecen en ingeniería. Además, los conceptos son más fáciles de interpretar en el espacio tridimensional ordinario, lo que hace didácticamente aconsejable centrar la atención sobre las funciones reales de tres variables reales. Pero los resultados son válidos para cualquier número de variables. Por eso el resumen que sigue lo hacemos para funciones reales de *n* variables reales.

[7] El producto escalar de un vector $\boldsymbol{v}$ por otro unitario ***u*** con el que forma el ángulo α es $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}=1|\boldsymbol{v}|\cos\alpha$. Resulta la proyección de $\boldsymbol{v}$ en la dirección de ***u***. Es máximo si $\alpha=0$; o sea, si los dos vectores tienen la misma dirección. Entonces el producto escalar es el modulo de $\boldsymbol{v}$.

Derivada parcial de la función real de n variables reales $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *respecto a* $x_{k\,(k=1,\ldots,n)}$ *es*

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

Diferencial total de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *en un punto* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es la función lineal de las variables reales* $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n)$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

Gradiente de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es la función vectorial de variables* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Se llama nabla al operador

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

La generalización del producto escalar de dos vectores de dimensión 3 a dos vectores de dimensión *n* se llama *producto interno* de los dos vectores. Si $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n)$, la diferencial de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el producto escalar o interno

$$\nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}f$$

La generalización de módulo de un vector de dimensión 3 a vectores de dimensión *n* se llama *norma*. La norma de un vector $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n)$ es

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x_n)^2}$$

Vector unitario es cada vector de módulo o norma 1.

Vector unitario en la dirección de un vector d**r** *es el vector*

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}$$

Se llama derivada de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *en la dirección del vector unitario* ***u*** *a*

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left[\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + \lambda \boldsymbol{u}\right] - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\lambda}$$

Si la componente *h* de ***u*** vale 1 y el resto de las componentes cero, la derivada direccional resulta la derivada parcial respecto a x_h. Y si *n*=1, la derivada direccional es la derivada de la función *f*.

La derivada de una función $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ *en un punto en cualquier dirección es el producto escalar o producto interno del gradiente en ese punto por el vector unitario de esa dirección*:

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u}$$

La derivada direccional máxima de una función en cada punto es la derivada en la dirección del gradiente en ese punto, y vale el módulo o norma del gradiente en ese punto.