Teorema de la potencia de multipolos y medida de potencia en sistemas trifásicos

F. R. Quintela, R. C. Redondo, N. R. Melchor, J. M. G. Arévalo y M. M. Redondo.
Universidad de Salamanca

Introducción

La energía eléctrica se obtiene, se transporta y se distribuye casi exclusivamente por medio de sistemas trifásicos. Los sistemas trifásicos se idearon como yuxtaposición de tres sistemas monofásicos. La manera más natural de obtener un sistema trifásico es la conexión en estrella, que consiste en reunir tres hilos, cada uno de una línea monofásica, en uno solo, el hilo neutro (fig. 1). En la conexión triángulo se sustituyen pares de hilos, uno de cada línea monofásica, por uno solo (fig. 2).

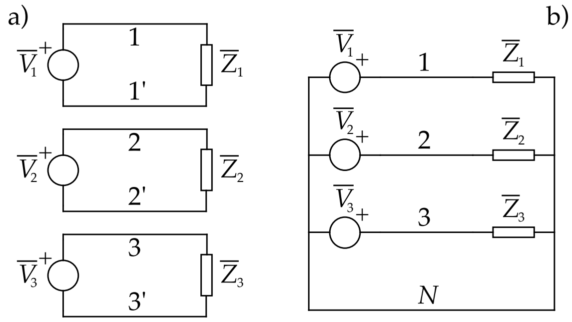

Fig. 1.- a) Tres sistemas monofásicos. b) Sistema trifásico en estrella con cuatro hilos. Se ha obtenido por la reunión en un solo hilo, el *N*, de los hilos 1', 2', y 3' de los sistemas monofásicos de procedencia.

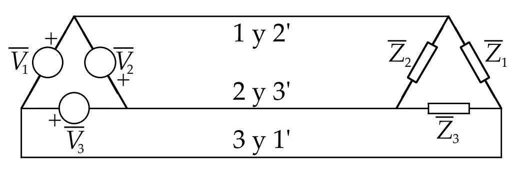

Fig. 2.- Si se reúnen los hilos de los tres sistemas monofásicos de la figura 1a) como se indica en esta, se obtiene un sistema trifásico en triángulo.

Este origen de los sistemas trifásicos y, en general, de los sistemas polifásicos como combinación de sistemas monofásicos, ha determinado a lo largo de la historia, y en gran parte determina en la actualidad, la forma de plantear su estudio: el análisis de un sistema trifásico se acomete como el de tres sistemas monofásicos, y un receptor trifásico se considera como el conjunto de tres receptores monofásicos conectados en estrella o en triángulo[1]-[6]. Sin embargo, identificar un receptor trifásico exclusivamente con la conexión en estrella o en triángulo de tres receptores monofásicos limita el alcance de los resultados del estudio y de sus aplicaciones, pues no parecen incluirse todos los receptores trifásicos posibles. En la figura 3 se muestra una combinación de impedancias conectada a una línea trifásica, que no tiene ninguna de esas dos configuraciones. Pueden idearse otras combinaciones semejantes, que no sean conexiones en estrella o en triángulo. Pero, incluso, un receptor trifásico puede ser más complejo aún, ya que puede contener no solo impedancias, sino también generadores. Es decir, no necesariamente los receptores trifásicos han de ser pasivos, sino que también pueden ser activos. La figura 4 representa ese receptor general: el rectángulo simboliza cualquier receptor trifásico de tres o cuatro hilos sin ninguna limitación, o sea, una red sinusoidal de tres o cuatro terminales activa o pasiva, sin restricción alguna en la conexión de sus componentes internos. Red sinusoidal significa que las intensidades permanentes son sinusoidales de la misma frecuencia si las tensiones lo son. Pero receptores trifásicos así son habitualmente ignorados por la bibliografía, que solo se ocupa de los formados por tres receptores monofásicos conectados en estrella o en triángulo[1]-[6].

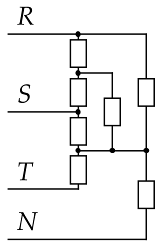

Fig. 3.- Receptor conectado a una línea trifásica que no está formado por tres receptores monofásicos en estrella o en triángulo. Los pequeños rectángulos son impedancias.

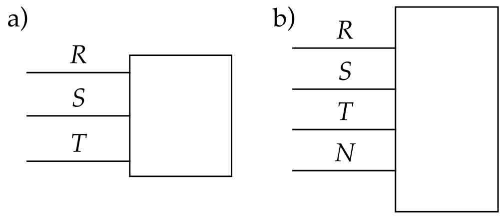

Fig. 4.- Internamente un receptor trifásico no necesariamente ha de estar formado por tres receptores en estrella o en triángulo. Puede ser tan complejo como se quiera e incluir generadores.

Método de los tres vatímetros

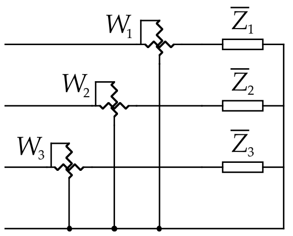

Fig.5.- Cada vatímetro mide la potencia que absorbe el receptor monofásico correspondiente. Por eso la suma de las indicaciones de los tres vatímetros es la potencia que absorbe el receptor trifásico.

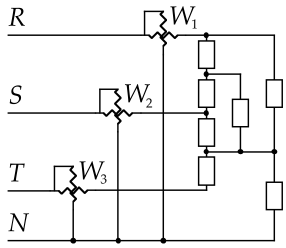

Fig. 6.- Aquí cada vatímetro no mide la potencia que absorbe ningún receptor monofásico. Por tanto, con la justificación habitual del método de los tres vatímetros no es posible asegurar que la suma de sus indicaciones es la potencia que absorbe el receptor trifásico.

Un ejemplo de limitación de resultados originada por esta forma de estudio es el corto alcance que el método de los tres vatímetros parece tener. La única justificación que se ofrece en la bibliografía general es la sugerida por la figura 5: la suma de las indicaciones de los tres vatímetros de esa figura es la potencia activa absorbida por el receptor trifásico, porque cada vatímetro mide la potencia activa que absorbe un receptor monofásico[1]-[6]. Pero, solo como consecuencia de esta justificación, no se puede asegurar que la suma de las indicaciones de los vatímetros de la conexión de la figura 6 es la potencia que absorbe el receptor trifásico, pues allí cada vatímetro no indica la potencia de un receptor monofásico. Tampoco de un receptor cualquiera del que no se conozca su conexión interna (fig. 7). Mucho menos se puede asegurar que, con la conexión representada en la figura 8, la suma de las indicaciones de los tres vatímetros sea la potencia que absorbe el receptor trifásico. En esa figura la bobina de intensidad de uno de los vatímetros está en el hilo neutro, y el punto común de las bobinas de tensión de los tres vatímetros está en la fase T. Tampoco con la conexión de esa figura cada vatímetro mide la potencia de un receptor monofásico. La citada justificación del método de los tres vatímetros más bien hace parecer poco probable que la suma de las indicaciones de los tres vatímetros de la figura 8 sea la potencia que absorbe el receptor trifásico.

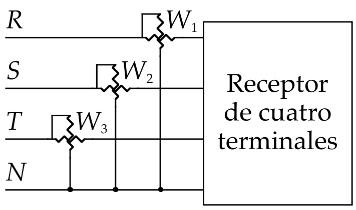

Fig. 7.- La justificación habitual del método de los tres vatímetros no asegura que la suma de las indicaciones de estos tres sea la potencia que absorbe el receptor, si no se conoce su conexión interna.

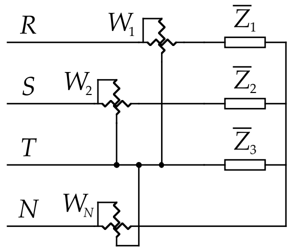

Fig. 8.- Aquí la bobina de intensidad de un vatímetro está en el hilo neutro. Ahora cada vatímetro no mide la potencia de un receptor monofásico, por lo que la justificación habitual del método de los tres vatímetros no asegura que la suma de las indicaciones de estos tres sea la potencia que absorbe el receptor trifásico.

Método de los dos vatímetros

Si los tres receptores monofásicos están conectados en triángulo, la justificación del método de los tres vatímetros obliga a conectarlos como se indica en la figura 9, que es la forma en que cada vatímetro mide la potencia de un receptor monofásico. La suma de las tres indicaciones es, por esta razón, la potencia activa que absorbe el receptor trifásico. Pero, en la mayoría de los casos, esa conexión es harto difícil de ejecutar, pues, para poder realizarla, los tres receptores monofásicos han de tener sus terminales accesibles, lo que ocurre pocas veces. Si la conexión del receptor es en estrella sin neutro, el método de los tres vatímetros requiere que el centro de la estrella sea accesible, también difícil casi siempre.

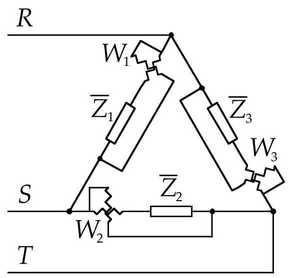

Fig. 9.- La suma de las indicaciones de los tres vatímetros es la potencia que absorbe el receptor trifásico en triángulo.

El método de los dos vatímetros resuelve esta dificultad. Se demuestra que la suma de las indicaciones de los dos vatímetros de las conexiones representadas en las partes a) y b) de la figura 10 es la potencia activa que absorbe el receptor trifásico, es decir, la suma de las potencias que absorben los tres receptores monofásicos. Las demostraciones que de este método se ofrecen en la bibliografía de nuevo se refieren solo a receptores trifásicos formados por tres receptores monofásicos conectados en estrella o en triángulo. Como en el caso de los tres vatímetros, se ignoran receptores con otras configuraciones internas. Incluso, a veces, la demostración del método solo se hace para receptores formados exclusivamente por impedancias. Esas demostraciones no aseguran, por tanto, que el método sirva para medir la potencia activa que absorbe el receptor de la figura 11, por ejemplo, que no está formado por tres receptores monofásicos conectados en estrella o en triángulo. Como, además, las demostraciones solo se hacen para receptores con tensiones e intensidades sinusoidales, no se ofrece información sobre las influencias que las deformaciones de esas ondas pueden ejercer sobre las medidas. Por otra parte, el método de los dos vatímetros se demuestra siempre como un caso especial, notablemente alejado del método de los tres vatímetros[1]-[6].

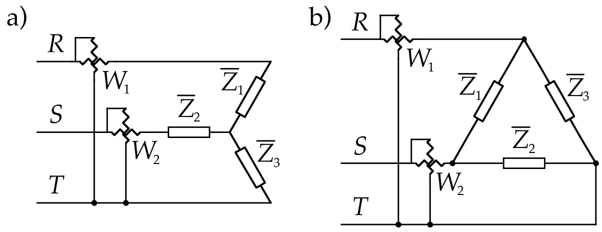

Fig. 10.- El método de los dos vatímetros solo se demuestra en la bibliografía general para las conexiones estrella y triángulo.

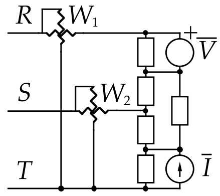

Fig. 11.- Con las demostraciones habituales del método de los dos vatímetros no se puede asegurar que la suma de las indicaciones de los dos representados en la figura sea la potencia que absorbe el receptor trifásico.

Teoría de multipolos

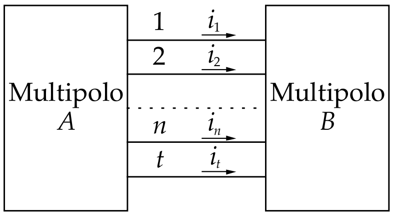

Fig. 12.- La teoría de multipolo considera las redes divididas en dos partes conectadas por t terminales. Cada una de esas partes es un multipolo.

Una forma de estudiar la redes eléctricas, que salva estas dificultades, es la teoría de multipolos[7]. Consiste en considerar las redes divididas en dos partes conectadas por t terminales (fig. 12). Cada una de esas partes es un multipolo. Esta forma de estudio proporciona resultados muy generales y útiles para ser aplicados a las redes que tienen una constitución con dos porciones diferenciadas, como ocurre con los sistemas polifásicos. Si se toma un punto cualquiera como referencia de potenciales, la tensión entre cada terminal del multipolo y ese punto se llama potencial de ese terminal. Sobre la figura 12, las matrices

$$[v]=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \\ v_t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [i]=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdots \\ i_n \\ i_t \end{bmatrix}$$

se llaman, respectivamente, matriz de potenciales y matriz de intensidades de los terminales del multipolo B. $v_{k;k=1,2,\ldots,t}$ es el potencial del terminal k e $i_{k;k=1,2,\ldots,t}$ la intensidad que entra en el multipolo B por el terminal k. Las matrices $[v]$ y $-[i]$, opuesta de $[i]$, son, respectivamente, la matriz de potenciales y la matriz de intensidades de los terminales del multipolo A. Habitualmente se toma un terminal, tal como el t, como origen de potenciales. Entonces $v_t = 0$.

La teoría de multipolos consiste, esencialmente, en tratar de expresar todas las variables útiles de los multipolos solo en función de las variables externas, es decir, en función de los potenciales y de las intensidades de los terminales, que son más fácilmente accesibles.

Potencia de multipolos

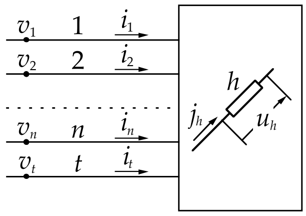

Fig. 13.- El teorema de la potencia de multipolos demuestra que $\sum_{h=1}^{r} u_h j_h = \sum_{k=1}^{t} v_k i_k$, donde v_k es el potencial del terminal k e i_k la intensidad que entra por el terminal k.

En la figura 13 se representa una rama interna, la h, dentro del multipolo a que pertenece. La potencia instantánea que absorbe esa rama es $p_h = u_h j_h$. u_h es la tensión de la rama h y j_h su intensidad. La potencia instantánea que absorbe el multipolo es la suma de las potencias instantáneas que absorben todas sus ramas internas, es decir,

$$p = \sum_{h=1}^{r} p_h = \sum_{h=1}^{r} u_h j_h$$

r es el número de ramas internas. Si se halla el valor medio de los dos primeros miembros de la fórmula anterior, se obtiene que el valor medio P de la potencia que absorbe el multipolo es también la suma de los valores medios de las potencias que absorben todas sus ramas internas:

$$P = \sum_{h=1}^{r} P_h$$

P_h es el valor medio de la potencia que absorbe la rama interna h. Según esta fórmula, para medir el valor medio de la potencia que absorbe un multipolo hay que medir, por medio de r vatímetros, el valor medio de la potencia que absorbe cada rama interna y hacer la suma de todos ellos.

Si el multipolo es de corriente alterna, el valor medio de la potencia instantánea que absorbe se llama potencia activa, que habría que medir con r vatímetros conectados a las ramas internas. Eso es lo que hace el método de los tres vatímetros, como ya vimos.

Teorema de la potencia de multipolos

En el artículo *Multi-terminal network power meassurement*[8] publicamos un resultado útil del estudio multipolar de las redes eléctricas, que hemos llamado *teorema de la potencia de multipolos* (*multi-terminal network power theorem*). Este teorema demuestra que la suma de productos $\sum_{h=1}^{r} u_h j_h = p$ de las tensiones de las ramas internas de un multipolo por sus correspondientes intensidades coincide con la suma $\sum_{k=1}^{t} v_k i_k$ de los productos de los potenciales de los terminales por las correspondientes intensidades de esos terminales. O sea, que la potencia instantánea que absorbe el multipolo también se puede hallar como suma de los productos de los potenciales por las intensidades de los terminales correspondientes:

$$p = \sum_{k=1}^{t} v_k i_k$$

Y esto es cierto para todo tipo de multipolos: activos, pasivos, lineales o no, y cualesquiera que sean las formas de onda de las intensidades y de las tensiones: continuas, alternas, sinusoidales de la misma o distintas frecuencias, o no sinusoidales.

Este resultado es de gran utilidad, pues indica que es posible medir la potencia de cualquier multipolo de t terminales conectando externamente t vatímetros como se representa en la figura 14a), o $n = t - 1$ vatímetros como se representa en la figura 14b). Como se ve, se ahorra un vatímetro si se toma un terminal cualquiera, tal como el t, como origen de potenciales. La suma de las indicaciones de los vatímetros de las figuras 14a) y 14b) es la potencia instantánea que absorbe el multipolo si esta potencia es constante o varía con el tiempo con la suficiente lentitud como para que las indicaciones de los vatímetros puedan seguirla. Si la variación es rápida, cada vatímetro indica el valor medio del producto de la tensión de su bobina de tensión por la intensidad de su bobina de intensidad[9][10], es decir, cada vatímetro indica el valor medio de cada producto $v_k i_k$.

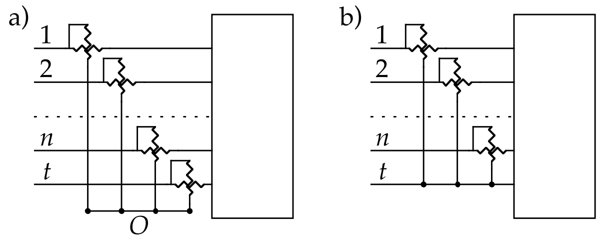

Fig. 14.- La potencia de cualquier multipolo de t terminales se puede medir con t vatímetros conectados como en a) o con $n = t - 1$ si se toma un terminal cualquiera, como el t, como origen de potenciales (fig. b). La suma de las indicaciones (que pueden ser positivas o negativas) es la potencia que absorbe el multipolo. Si los productos $v_k i_k$ varían lentamente los vatímetros indican la potencia instantánea. Si no, indican el valor medio de la potencia. Esto es cierto cualquiera que sea el multipolo y para toda forma de las ondas de tensión e intensidad.

Si se hallan los valores medios de los dos miembros de la última igualdad se obtiene que el valor medio de la potencia que absorbe el multipolo es la suma de los valores medios de los productos $v_k i_k$, precisamente la suma de las indicaciones de los t o los n vatímetros. Por tanto, cualquiera que sea el multipolo y cualesquiera que sean las formas de las ondas de las tensiones y de las intensidades, la suma de las indicaciones de los vatímetros conectados como en las figuras 14a) y 14b) es el valor medio de la potencia que absorbe el multipolo.

Una consecuencia del teorema es que no importa la constitución interna del multipolo: siempre la suma de las indicaciones de los vatímetros conectados como en la figura 14 es el valor medio de la potencia que absorbe.

Otra consecuencia es que cualquier punto puede ser referencia de los potenciales de los terminales del multipolo. Por tanto, también cualquier terminal del multipolo. Eso significa que el punto común de las bobinas de tensión de los vatímetros puede ser cualquiera y, particularmente, cualquier terminal. Las bobinas de intensidad se conectan en serie con el resto de los terminales. Por tanto, ahora sí se puede asegurar que las sumas de las indicaciones de los vatímetros de las figuras 6, 7, 8 y 11 son las potencias que absorben los correspondientes receptores trifásicos.

Además, tanto el método de los tres vatímetros como el de los dos vatímetros aparecen ahora como simples casos particulares de la forma general de medir la potencia que absorbe un multipolo, y no requieren demostraciones particulares. Nótese también que ambos métodos no son solo formas de medir potencias de sistemas trifásicos, sino procedimientos totalmente generales: el método de los tres vatímetros sirve para cualquier cuadripolo y el de los dos vatímetros para cualquier tripolo, sea cual sea su constitución interna y sean cuales sean las formas de las ondas de las tensiones y de las intensidades[7][8].

Ejemplo 1

Las partes a) y b) de la figura 15 representan el mismo receptor trifásico conectado a una misma línea trifásica de tensiones equilibradas. El valor eficaz de la tensión entre fases es $U = 400\,\mathrm{V}$, lo que significa que los fasores de las tensiones entre las fases y el neutro son, respectivamente, $\overline{V}_R = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/0°}$, $\overline{V}_S = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-120°}$ y $\overline{V}_T = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-240°}$. Se ha tomado la tensión entre la fase R y el neutro como origen de fases. Si los fasores de las intensidades de las fases son $\overline{I}_R = 5\underline{/-30°}$, $\overline{I}_S = 6\underline{/-160°}$ e $\overline{I}_T = 4\underline{/85°}$, hallaremos la suma de las indicaciones de los tres vatímetros de la parte a) y de los tres de la parte b). Según el teorema de la potencia de multipolos esa suma ha de ser la misma en a) que en b), y es la potencia activa que absorbe el receptor trifásico.

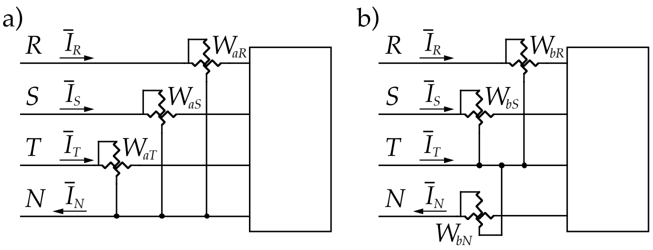

Fig. 15.- La suma de las indicaciones de los vatímetros es la misma en ambas figuras, y es la potencia que absorbe el receptor trifásico.

Cada vatímetro indica el producto del valor eficaz de la tensión de su bobina de tensión por el valor eficaz de la intensidad de su bobina de intensidad por el coseno del desfase entre los fasores de esa tensión y de esa intensidad[9][10]. Por tanto, sobre la figura 15a),

$$P_{aR} = \frac{U}{\sqrt{3}} I_R \cos\left(\overline{V}_R, \overline{I}_R\right)$$

$$P_{aS} = \frac{U}{\sqrt{3}} I_S \cos\left(\overline{V}_S, \overline{I}_S\right)$$

$$P_{aT} = \frac{U}{\sqrt{3}} I_T \cos\left(\overline{V}_T, \overline{I}_T\right)$$

$\cos\left(\overline{V}_R, \overline{I}_R\right)$ significa que se halla el coseno del ángulo que forman $\overline{V}_R$ e $\overline{I}_R$. El diagrama fasorial de la figura 16 ayuda a conocer los ángulos que se utilizan en la suma de las indicaciones de los vatímetros, que se hace a continuación.

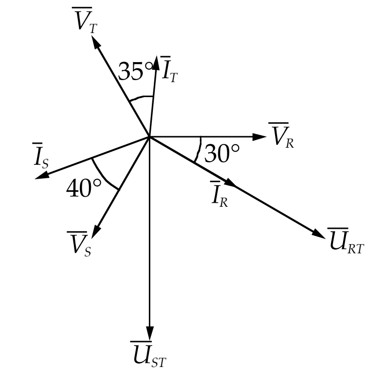

Fig. 16.- Diagrama fasorial de tensiones e intensidades.

$$P_a = \frac{U}{\sqrt{3}}\left(I_R\cos 30° + I_S\cos 40° + I_T\cos 35°\right) \cong 2818.16\,\text{W}$$

De forma similar, sobre la figura 15b),

$$P_{bR} = UI_R\cos\left(\overline{U}_{RT}, \overline{I}_R\right)$$

$$P_{bS} = UI_S\cos\left(\overline{U}_{ST}, \overline{I}_S\right)$$

$$P_{bN} = V_T I_N \cos\left(-\overline{V}_T, -\overline{I}_N\right) = \frac{U}{\sqrt{3}} I_N \cos\left(-\overline{V}_T, -\overline{I}_N\right)$$

$\cos\left(-\overline{V}_T, -\overline{I}_N\right)$ significa que hay que hallar el coseno del ángulo que forman los fasores opuestos de $\overline{V}_T$ e $\overline{I}_N$.

$$\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T \cong 1.12\underline{/-149.40°}$$

$$-\overline{I}_N \simeq 1.12\underline{/-149.40° + 180°} = 1.12\underline{/30.60°}$$

$$-\overline{V}_T = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-240° + 180°} = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-60°}$$

$$\cos\left(-\overline{V}_T, -\overline{I}_N\right) \simeq \cos(-60° - 30.60°) = \cos(-90.60°)$$

$$P_b \simeq U\left(I_R\cos 0° + I_S\cos 70° + \frac{I_N\cos(-90.60°)}{\sqrt{3}}\right) \simeq 2818.16\,\text{W}$$

Como se ve, tal como establece el teorema de la potencia de multipolos, las sumas de las indicaciones de los vatímetros de 15a) y de 15b) son iguales.

Potencia compleja

En multipolos en los que todas las tensiones e intensidades son funciones sinusoidales de la misma frecuencia, los llamados multipolos de corriente alterna o multipolos sinusoidales, la potencia compleja que absorbe la rama interna h es $\overline{S}_h = \overline{V}_h \overline{I}_h^*$, donde $\overline{V}_h$ es el fasor de la tensión e $\overline{I}_h^*$ el conjugado del fasor de la intensidad de la rama h. La parte real de la potencia compleja es la potencia activa y la imaginaria la potencia reactiva que absorbe la rama. La potencia compleja que absorbe el multipolo es la suma de las potencias complejas que absorben todas sus ramas internas, es decir

$$\overline{S} = P + \mathrm{j}Q = \sum_{h=1}^{r} \overline{S}_h = \sum_{h=1}^{r} \overline{V}_h \overline{I}_h^* = \sum_{h=1}^{r} P_h + \mathrm{j}\sum_{h=1}^{r} Q_h$$

$Q = \sum_{h=1}^{r} Q_h$ es la potencia reactiva que absorbe el multipolo, que es la suma de las potencias reactivas que absorben sus ramas internas.

Una extensión del teorema de la potencia de multipolos para multipolos sinusoidales establece que la suma de los productos de todas las ramas internas $\sum_{h=1}^{r} \overline{V}_h \overline{I}_h^*$ es igual a la suma de los productos de los fasores de los potenciales por los conjugados de los fasores de las intensidades de los terminales: $\sum_{h=1}^{r} \overline{V}_h \overline{I}_h^* = \sum_{k=1}^{t} \overline{V}_k \overline{I}_k^*$. Como el primer miembro es la potencia compleja que absorbe el multipolo, resulta que esa potencia compleja vale[7][8]

$$\overline{S} = \sum_{k=1}^{t} \overline{V}_k \overline{I}_k^*$$

Es decir,

$$P + \mathrm{j}Q = \sum_{k=1}^{t} \overline{V}_k \overline{I}_k^* = \sum_{k=1}^{t} V_k I_k \cos\left(\overline{V}_k, \overline{I}_k\right) + \mathrm{j}\sum_{k=1}^{t} V_k I_k \mathrm{sen}\left(\overline{V}_k, \overline{I}_k\right)$$

De donde

$$Q = \sum_{k=1}^{t} V_k I_k \mathrm{sen}\left(\overline{V}_k, \overline{I}_k\right)$$

Los varímetros indican el producto del valor eficaz de la tensión de su bobina de tensión por el valor eficaz de la intensidad de su bobina de intensidad por el seno de la diferencia de fase entre las dos, si ambas son funciones sinusoidales de la misma frecuencia. Por tanto, según la última fórmula, la potencia reactiva que absorbe cualquier multipolo de corriente alterna puede medirse con t varímetros conectados como en la figura 14a) o con n varímetros conectados como en la figura 14b). También, por consiguiente, para medir la potencia reactiva que absorbe un receptor trifásico son válidas las conexiones de las figuras 15a) y 15b) hechas ahora con varímetros en lugar de vatímetros.

Ejemplo 2

Supondremos que los aparatos de medida representados en las figuras 15a) y 15b) son ahora varímetros. Comprobaremos que las sumas de sus indicaciones son las mismas en ambos casos. En la figura 15a)

$$Q_{aR} = \frac{U}{\sqrt{3}} I_R \,\mathrm{sen}\left(\overline{V}_R, \overline{I}_R\right)$$

$$Q_{aS} = \frac{U}{\sqrt{3}} I_S \mathrm{sen}\left(\overline{V}_S, \overline{I}_S\right)$$

$$Q_{aT} = \frac{U}{\sqrt{3}} I_T \operatorname{sen}\left(\bar{V}_T, \bar{I}_T\right)$$

$$Q_a = \frac{400}{\sqrt{3}}\left(5\operatorname{sen}30° + 6\operatorname{sen}40° + 4\operatorname{sen}35°\right) \simeq 1997.87\,\text{VAr}$$

En la 15b)

$$Q_{bR} = UI_R \operatorname{sen}\left(\bar{U}_{RT}, \bar{I}_R\right)$$

$$Q_{bS} = UI_S \operatorname{sen}\left(\bar{U}_{ST}, \bar{I}_S\right)$$

$$Q_{bN} = V_T I_N \operatorname{sen}\left(-\bar{V}_T, -\bar{I}_N\right) = \frac{U}{\sqrt{3}} I_N \operatorname{sen}\left(-\bar{V}_T, -\bar{I}_N\right)$$

La suma es

$$Q_b \simeq U\left(I_R \operatorname{sen}0° + I_S \operatorname{sen}70° + \frac{I_N \operatorname{sen}\left(-90.60°\right)}{\sqrt{3}}\right) \simeq 1997.87\,\text{VAr}$$

La misma que la de la figura 15a).

Potencia como producto de matrices

El empleo de matrices simplifica casi siempre las fórmulas, que resultan así más fáciles de recordar. Como, además, las calculadoras y los actuales programas de cálculo permiten operar directamente con matrices, las expresiones matriciales son ahora directamente utilizables para el cálculo. Si se emplean las matrices de los potenciales y de las intensidades de los terminales, la fórmula de la potencia instantánea que absorbe un multipolo puede escribirse de una forma más sugerente así:

$$p = [v]^T [i]$$

donde $[v]^T$ es la matriz transpuesta de $[v]$, que es la matriz de los potenciales de los terminales. Y la fórmula de la potencia compleja que absorbe un multipolo sinusoidal así:

$$\bar{S} = \left[\bar{V}\right]^T \left[\bar{I}\right]^*$$

$\left[\bar{V}\right]$ es la matriz columna cuyos términos son los fasores de los potenciales de los terminales y $\left[\bar{V}\right]^T$ su transpuesta. $\left[\bar{I}\right]^*$ es la matriz columna cuyos términos son los conjugados de los fasores de las intensidades de los terminales del multipolo.

Sobre la figura 12 se ve que la potencia instantánea que absorbe el multipolo B es

$$p_B = [v]^T [i]$$

y la que absorbe el A es

$$p_A = [v]^T \left(-[i]\right) = -[v]^T [i] = -p_B .$$

Se comprueba así que la potencia instantánea que absorbe el multipolo B es la que entrega el A. Lo mismo ocurre con la potencia compleja si la red es sinusoidal: la potencia compleja que absorbe B es

$$\bar{S}_B = \left[\bar{V}\right]^T \left[\bar{I}\right]^*$$

Y la que absorbe A

$$\bar{S}_A = \left[\bar{V}\right]^T \left(-\left[\bar{I}\right]^*\right) = -\left[\bar{V}\right]^T \left[\bar{I}\right]^* = -\bar{S}_B$$

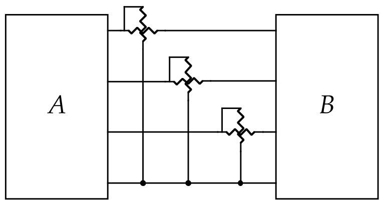

Fig. 17.- La suma de las indicaciones de los vatímetros es el valor medio de la potencia que absorbe *B*, que es igual al valor medio de la potencia que entrega *A*.

Por tanto, la suma de las indicaciones de los vatímetros conectados como en la figura 17 proporciona el valor medio de la potencia que absorbe el multipolo B, que es el valor medio de la potencia que entrega A, sean cuales sean los multipolos A y B y las formas de las ondas de tensión y de intensidad. Si esa figura 17 representa una red de corriente alterna, la suma de las indicaciones de los vatímetros es la potencia activa que absorbe B y la potencia activa que entrega A. Si los aparatos de medida son varímetros y las tensiones e intensidades son funciones sinusoidales de la misma frecuencia, la suma de sus indicaciones es la potencia reactiva que absorbe el multipolo B, que es la potencia reactiva que entrega A.

Potencias de dipolos

El teorema de la potencia de multipolos, las fórmulas y los procedimientos de medida expuestos son aplicables a los dipolos. En la figura 18 se muestra el mismo dipolo conectado a la misma línea, con dos vatímetros en a) y con uno en b) para medir la potencia que absorbe. Las dos formas son equivalentes, pues la potencia en a) es $p = v_1 i_1 + v_2 i_2$; como $i_2 = -i_1$, $p = v_1 i_1 - v_2 i_1 = (v_1 - v_2) i_1 = vi$, que es la indicación del vatímetro de b). v es la tensión entre los extremos del dipolo, e $i = i_1$ su intensidad.

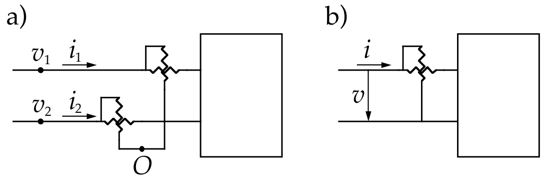

Fig. 18.- a) y b) representan el mismo dipolo conectado a la misma línea monofásica. La potencia que absorbe el dipolo es la suma de las indicaciones de los dos vatímetros de a). El vatímetro de b) da directamente esa potencia.

Si son dipolos de alterna, la suma de las indicaciones de los dos vatímetros en a) es la potencia activa que absorbe el dipolo, que coincide con la indicación del vatímetro de b). Si los aparatos de medida son varímetros y las tensiones e intensidades son funciones sinusoidales de la misma frecuencia, la suma de las indicaciones de los dos varímetros de a) es la potencia reactiva que absorbe el dipolo, y coincide con la indicación del varímetro de b).

Conclusiones

La potencia que absorbe un multipolo es la suma de las potencias que absorben sus ramas internas. El teorema de la potencia de multipolos permite obtener esa potencia solo con medidas externas de tensión y de intensidad de los terminales del multipolo. Como consecuencia, proporciona una forma muy general, simple y útil para medir potencias. Es aplicable a todo tipo de multipolos, con independencia de las ramas internas que los constituyan. No importa tampoco cuáles sean las formas de las ondas de las tensiones e intensidades.

La suma de las indicaciones de los vatímetros conectados a los t terminales o a $n = t - 1$ terminales, de la manera que expresa el teorema, es siempre el valor medio de la potencia que absorbe el multipolo. Ese valor medio es la potencia activa en los multipolos de corriente alterna.

El punto o terminal común de las bobinas de tensión de los vatímetros puede ser cualquiera.

Las mismas conexiones con varímetros valen para medir la potencia reactiva de multipolos de corriente alterna.

Los procedimientos habituales de medida de potencia de sistemas polifásicos resultan ser solo casos particulares del teorema. Así, los métodos de los tres vatímetros y de los dos vatímetros aparecen ahora como simples aplicaciones para cuadripolos y tripolos respectivamente. Además el alcance de ambos métodos queda ahora bien determinado.

El conocimiento del teorema amplía las formas posibles de conexión de los vatímetros y varímetros, lo que puede ser útil cuando se ejecutan instalaciones de medida o se trabaja en ellas.

Referencias

[1] Moeller-Werr. *Elektrische Messtechnik*. B. G. Teubner. Stuttgart 1960.

[2] J. Brener. *Análisis de Circuitos Eléctricos*. Ediciones del Castillo. Madrid 1966.

[3] S. Franco. *Electric Circuits Fundamentals*. Saunders College, Fort Worth 1994.

[4] J. David Irving. *Basic Engineering Circuits Analysis*. Macmillan. New York 1990.

[5] R. C. Dorf. *Introduction to Electric Circuits*. John Wiley. Chichester 1993.

[6] D. E. Johnson, J. L. Hilburn and R. J. Johnson. *Basic Electric Circuit Analysis*. Prentice hall. Englewood Cliffs 1990.

[7] Félix Redondo Quintela, Roberto Carlos Redondo Melchor. *Redes Eléctricas de Kirchhoff 2ª edición*. Ed. Revide. Béjar 2005.

[8] Félix Redondo Quintela, Norberto Redondo Melchor. *Multi-terminal network power meassurement*. International Journal of Electrical Engineering Education (IJEEE). April 2002.

[9] Félix Redondo Quintela. *Redes con excitación sinusoidal*. Ed. Revide. Béjar 1997.

[10] Félix Redondo Quintela, Juan Manuel García Arévalo. *Prácticas de Circuitos Eléctricos 5ª edición*. Ed. Revide. Béjar 2002.