3. Corriente eléctrica

Félix Redondo Quintela y Roberto Carlos Redondo Melchor
Universidad de Salamanca

Concentración de cargas libres

Definición.- *Conductor es un volumen con cargas libres*. Las cargas libres de los conductores se llaman *portadores de carga* o, simplemente, *portadores*. El número n de cargas libres por unidad de volumen se llama *densidad de portadores* o *concentración de portadores*. n es, por tanto, un número real positivo. Su unidad es portadores/m^3. Se llama *densidad de carga libre* de un conductor a la suma de las cargas de las partículas libres que hay en cada unidad de volumen. Si todos los portadores de un conductor tienen la misma carga q, $\rho_l = qn$ es la *densidad de carga libre* de ese conductor. Se ve que es un número real positivo si q es positiva y negativo si q es negativa. Como q se mide en C/portador (culombios por portador), ρ_l resulta en C/m^3.

Corriente eléctrica

El paso de carga eléctrica hacia un lado de una superficie se llama corriente eléctrica a través de dicha superficie y hacia ese lado. Si hay cargas libres en un volumen, puede crearse una corriente eléctrica a través de una superficie de su interior moviendo las cargas libres con velocidad de dirección adecuada para que atraviesen esa superficie. Eso puede conseguirse aplicando fuerzas a las cargas libres del conductor, o sea, creando un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el conductor. Las cargas libres de los conductores reales son electrones o iones de volumen muy pequeño, por lo que pueden considerarse, sin error, cargas puntuales. Por tanto, la fuerza sobre cada carga libre q vale $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$. Esa fuerza tiene el mismo sentido que $\boldsymbol{E}$ si q es positiva y el opuesto si es negativa.

Para poder comparar corrientes a través de superficies, una magnitud útil es la *intensidad* de corriente a través de una superficie en un determinado sentido, que se define como *la carga que pasa cada unidad de tiempo a través de esa superficie en ese sentido*:

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

$q(t)$ es la carga que ha atravesado la superficie en el instante t. Se ve que la unidad de intensidad es el C/s (culombio por segundo)[1], que se llama amperio[2], de símbolo A en el Sistema Internacional de Unidades.

---

[1] Conviene recordar que la forma de leer C/s es culombio *por* segundo. Lo mismo que km/h debe leerse kilómetro por hora. No debe decirse kilómetro *a la* hora. Tampoco debe decirse kilómetro-hora, que designa al kmh. Unidades como Nm y Ωm deben leerse newton metro y ohmio metro. Ver Michel Dubesset, *Le Manuel du Système International d'Unités*, Editions Technip, Paris, 2000.

[2] En honor de André Marie Ampère (1775-1836), físico y matemático francés que contribuyó al desarrollo del Electromagnetismo.

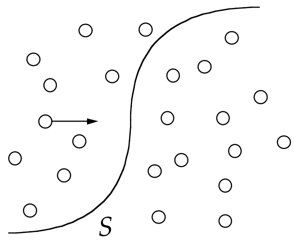

Fig. 1.- Si pasa carga a través de una superficie, se dice que hay corriente eléctrica a través de esa superficie.

Ejemplo:

La carga que ha pasado hacia la derecha de la superficie de la figura 1 entre los instantes 0 y t segundos es $q(t)=3t^4-1$; $0\leq t\leq 10$ s; (q resulta en culombios cuando en la fórmula se sustituye t en segundos). Averiguar la carga que ha pasado en t=0 s y en t=5 s, la función intensidad, la intensidad en t=1 s y en t=9 s.

$q(0)=-1$ C ; $q(5)=3\times 5^4 -1=1874$ C ; $i(t)=12t^3$; $i(1)=12$ A; $i(9)=12\times 9^3=8748$ A.

Como los dos tipos de cargas eléctricas se designan cuantitativamente por medio de números reales, la definición de intensidad implica un efecto compensador de las cargas negativas y positivas que aclaramos a continuación: si hacia la derecha de la superficie de la figura 1 pasan en un segundo 5 C de cargas positivas y 2 C de cargas negativas, la carga q que ha pasado en 1 segundo es q=5+(-2)=3 C, y la intensidad media durante ese segundo ha sido de 3/1=3 A. El resultado indica que el paso de cargas negativas hacia la derecha equivale al paso de la misma carga positiva hacia la izquierda; o sea, que una corriente de cargas negativas en un sentido de una superficie origina la misma intensidad que una corriente igual de cargas positivas en el sentido contrario. Por eso, que la intensidad de la corriente eléctrica hacia la derecha de la superficie de la figura 1 es 3 A, puede significar que realmente pasan 3 C cada segundo de carga positiva hacia la derecha; que pasan 3 C cada segundo de carga negativa hacia la izquierda o, incluso, que el balance de carga positiva y negativa que pasa cada segundo a través de la superficie en diferentes sentidos da como resultado 3 C de carga positiva hacia la derecha o 3 C de carga negativa hacia la izquierda cada segundo.

La definición de intensidad determina también el sentido que se toma como positivo para la intensidad, que es el sentido del movimiento de las cargas positivas y el opuesto al sentido del movimiento de las negativas. En efecto, si en la figura 1 pasa carga positiva hacia la derecha de la superficie, crece $q(t)$ al lado derecho, y la derivada respecto al tiempo, es decir, la intensidad hacia la derecha es positiva. Lo mismo si pasa carga negativa de la parte derecha a la izquierda, aumenta la carga $q(t)$ en la derecha, por lo que su derivada, la intensidad hacia la derecha, vuelve a ser positiva[3].

---

[3] A veces se dice que el sentido que se toma como positivo para la intensidad es el de las cargas positivas porque antes se creía que las cargas que se movían en los conductores eran las positivas. Realmente, una vez que se ha acordado designar la carga del electrón por medio de un número negativo, el verdadero motivo está, como se ha explicado, en la definición de intensidad. Para hacer coincidir el sentido positivo de la intensidad con el del movimiento de las cargas negativas, habría que definir la intensidad a través de una superficie así: $i=-\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, con signo menos, lo que sería bastante artificial y poco útil.

De la definición de intensidad se deduce inmediatamente la forma de hallar la carga que ha pasado a través de una superficie en el sentido de la intensidad. En efecto,

$$q(t) = \int i(t)\mathrm{d}t$$

La integral es indefinida, lo que significa que al resolverla queda determinada la función $q(t)$ excepto en una constante aditiva, que es la constante de integración. Para hallarla hay que conocer la carga que ha pasado para un valor de t.

Una forma equivalente a la expresión anterior se obtiene cuando se conoce la carga $q(0)$ que ya ha pasado en t=0. Entonces basta añadir la que pasa desde cero hasta el instante t; es decir,

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau + q(0)$$

En general, si en vez de conocer $q(0)$ se conoce $q(t_1)$, la expresión equivalente es

$$q(t) = \int_{t_1}^{t_2} i(\tau)\mathrm{d}\tau + q(t_1)$$

Ejemplo:

La intensidad que ha pasado a través de una superficie para cada valor t del tiempo comprendido entre 0 y 10 s es $i(\mathrm{t})=3t^3$-$6t^2$. La carga que había atravesado la superficie hasta t=0 es -3 C. Encontrar la función $q(t)$ y la carga que ha atravesado la superficie en t=10 s.

Utilizando la integral indefinida,

$$q(t) = \int i(t)\,\mathrm{d}t = \int (3t^3 - 6t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{3t^4}{4} - \frac{6t^3}{3} + K$$

$$q(0) = -3 = K$$

por tanto,

$$q(t) = \frac{3t^4}{4} - 2t^3 - 3$$

$$q(10) = \frac{3\times10^4}{4} - 2\times10^3 - 3 = 5\,497\mathrm{C} = 5.497\mathrm{kC}$$

O bien,

$$q(t) = \int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + q(0) = \int_0^t (3t^3 - 6t^2)\,\mathrm{d}t - 3 = \frac{3t^4}{4} - 2t^3 - 3$$

Velocidad de arrastre y movilidad

Las cargas libres de los cuerpos conductores tal como los metales, las disoluciones y los gases no están quietas. Tienen en cada momento velocidades de dirección y módulo aleatorios. Los electrones libres de los conductores sólidos son repelidos por otras cargas negativas libres y por los electrones de los átomos fijos cuando se acercan a ellos y atraídos por los iones positivos. Las cargas positivas y negativas libres de los fluidos son atraídas y repelidas por otras cargas y por los electrones ligados de los átomos o moléculas neutros. De esta manera las cargas libres intercambian energía entre ellas y con los átomos y moléculas del conductor, y modifican así sus trayectorias y los módulos de las velocidades, de manera que la intensidad de la corriente hacia cualquiera de los dos lados de una superficie del interior del conductor debida a estos movimientos aleatorios es cero, pues, por término medio, la carga que pasa cada unidad de tiempo hacia un lado es la misma que hacia el otro.

Si se aplica una fuerza a las cargas libres, incrementan la componente de su velocidad en el sentido de la fuerza, que produce una corriente eléctrica de intensidad no nula a través de una superficie perpendicular a la dirección de esa componente. Si no existieran interacciones con el resto del conductor, la fuerza sobre las cargas libres las aceleraría indefinidamente. Pero, por la interacción descrita, van cediendo al resto del conductor toda o parte de la energía cinética que le va siendo entregada por la fuerza. A pesar de la complejidad, las cosas pueden simplificarse notablemente si consideramos que, debido a la fuerza, las cargas se mueven con una velocidad, que llamaremos *velocidad de arrastre*, tal que el movimiento de cargas que produce es el mismo que el que realmente origina la compleja distribución de velocidades reales. La fuerza que aplicamos, que da origen a esta velocidad de arrastre, se llama *fuerza de arrastre*. Si el campo eléctrico correspondiente a esa fuerza es $\boldsymbol{E}$, la fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre una partícula con q culombios de carga vale

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E},$$

que tiene el sentido del campo si q es positiva, y el opuesto si q es negativa. Pues bien, una buena descripción para muchos medios reales se obtiene si se representa la interacción de las cargas libres con el resto del conductor por medio de una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad de arrastre y de sentido contrario a ella,

$$\boldsymbol{F}_R = -C\boldsymbol{v}$$

C es la constante de proporcionalidad, que depende del conductor y de la clase de partícula libre que se mueva en él (hay conductores que tienen más de una clase de portadores, como las disoluciones ácidas o alcalinas, por ejemplo, o el agua del mar, con muchas clases de iones en disolución). De la fórmula anterior se deduce que las unidad en que se mide C es el Ns/m. Si en t=0 se aplica un campo eléctrico al conductor, cada portador de carga q queda sometido a la fuerza de arrastre $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$, que le origina una velocidad de arrastre $\boldsymbol{v}$ y, por tanto, una fuerza de rozamiento $\boldsymbol{F}_R = -C\boldsymbol{v}$, resultando que, si no hay otras fuerzas, cada carga libre está sometida a una fuerza total

$$\boldsymbol{F}_t = q\boldsymbol{E} - C\boldsymbol{v}$$

que es igual a la masa de la partícula por la aceleración que le produce:

$$q\boldsymbol{E} - C\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{a}\,.$$

En muchos conductores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}$ tienen la misma dirección. Se llaman conductores isótropos[4]. Si se toma en ellos esa dirección como eje de coordenadas, los vectores solo tienen una componente, y la anterior ecuación puede escribirse como ecuación diferencial así:

$$qE - Cv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

O bien, separando las variables[5],

[4] No en todos los cuerpos la aceleración que origina la fuerza sobre las cargas libres tiene la dirección de la fuerza. Por ejemplo, en los cuerpos con estructura cristalina, la dirección de la velocidad de arrastre solo puede ser alguna relacionada con los ejes de simetría. Estos cuerpos en los que la aceleración de arrastre de las partículas libres no es la del campo que la origina se llaman cuerpos *no isótropos* o *anisótropos*.

$$-\frac{\mathrm{d}(Cv)}{qE - Cv} = -\frac{C}{m}\mathrm{d}t$$

Integrando los dos miembros,

$$\ln(qE - Cv) - \ln K = -\frac{C}{m}t$$

$\ln K$ es la constante de integración. Resulta:

$$\frac{qE - Cv}{K} = \mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t}$$

O bien,

$$v = \frac{q}{C}E - \frac{K}{C}\mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t}$$

La constante K se puede hallar si conocemos la velocidad de arrastre en t=0. Si durante mucho tiempo antes de cero el campo era nulo, esta velocidad es también nula[6], y crecerá como una función continua al aplicar el campo, por lo que $v(0)=0$. Sustituyendo este valor para t=0 en la fórmula de la velocidad queda:

$$0 = \frac{q}{C}E - \frac{K}{C}; \qquad K = qE$$

Y, sustituyendo el valor de K,

$$v = \frac{q}{C}E(1 - \mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t})$$

El límite de v cuando t tiende a infinito vale

$$\lim_{t\to\infty} v = \lim_{t\to\infty} \frac{q}{C}E(1 - \mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t}) = \frac{q}{C}E$$

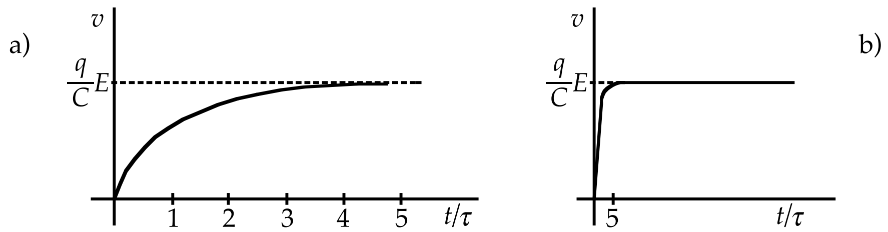

Fig. 2.- Representación gráfica del módulo de la velocidad de arrastre cuando se aplica a un conductor un campo eléctrico constante E en t=0. En b) la constante de tiempo es mucho menor que en a)

La constante $\tau=m/C$ se llama *constante de tiempo*[7]. Cuanto mayor sea, más tarda la velocidad de arrastre en alcanzar su valor final qE/C, que se consigue en la práctica cuando pasa un tiempo superior a cinco veces la constante de tiempo (fig. 2). Como se verá en los problemas, la constante de tiempo de los conductores reales es muy pequeña, de forma que, para todas las aplicaciones de electrotecnia, se puede suponer que el valor final de la

---

[5] Si las partículas libres están en el vacío, no hay rozamiento alguno, y la ecuación de su movimiento es $F = m\,a$ o bien $qE = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

[6] Porque si el campo es cero, la única fuerza que sufre la carga es la de rozamiento, que la frena hasta que la velocidad sea nula.

[7] Su unidad es (kg.m)/(Ns)=(kg.m)/(kg.m/s)=s.

velocidad se alcanza casi instantáneamente. Es decir, siempre que el campo eléctrico sea constante o varíe lentamente, la velocidad de arrastre vale

$$\boldsymbol{v} = \frac{q}{C}\boldsymbol{E}$$

En cualquier caso, esa fórmula vale siempre que haya transcurrido un tiempo mayor que cinco veces la constante de tiempo desde que se aplicó el campo constante. La constante de proporcionalidad

$$\mu = \frac{q}{C}$$

se llama *movilidad* de la partícula de que se trate y, como C, es un número real positivo, el signo de μ es el de la carga de la partícula. Resulta por tanto que la velocidad de arrastre de una partícula cargada vale

$$\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{E}$$

Esta fórmula será tomada como definición de conductor isótropo y servirá como axioma para deducir la teoría de los conductores isótropos, que se desarrolla a continuación. Debido al signo de μ, la fórmula indica que las cargas positivas (μ positiva) son movidas en el sentido del campo y las negativas (μ negativa) en sentido opuesto al del campo.

Conductividad

En un conductor isótropo la velocidad de arrastre de los portadores es

$$\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{E}$$

d$\boldsymbol{S}$ es una superficie perpendicular al campo (fig. 3). Como consecuencia de la velocidad de arrastre se originará un paso de carga a través de d$\boldsymbol{S}$ cuya intensidad vamos a evaluar.

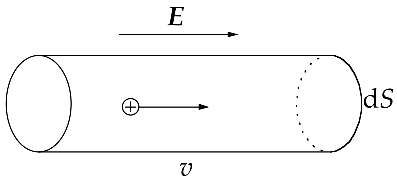

Fig. 3.- Solo las cargas positivas contenidas en un cilindro de generatriz igual al valor de la velocidad de arrastre v cruzarán la superficie dS antes de transcurrir un segundo.

Supondremos que los portadores son todos iguales y tienen carga positiva. La figura 3 representa la superficie dS como base de un cilindro de generatriz igual al módulo de la velocidad de arrastre de los portadores. La generatriz también tiene la dirección de la velocidad de arrastre. Solo las cargas libres que se encuentren dentro del cilindro atravesarán la superficie dS de la derecha en el próximo segundo. En efecto, ninguna carga cruza la superficie lateral, pues, si solo se considera la velocidad de arrastre, se mueven en la dirección del campo. Además, una carga que se encuentre a la izquierda de la base izquierda del cilindro no tendrá tiempo, en un segundo, de cruzar la superficie dS de la derecha, pues se mueve hacia allí con una velocidad v; es decir, recorre cada segundo solo la distancia v, que es la altura del cilindro. Por el contrario, una carga que esté en el interior del cilindro se encuentra a menos distancia de dS que la que recorre en un segundo, que es v, por lo que sí cruzará dS antes de un segundo. Por tanto, las partículas cargadas que cruzan dS en un segundo son las contenidas en el volumen de la figura 3, y su número se halla simplemente multiplicando la *concentración de cargas libres n* por el volumen del cilindro:

$$nv\mathrm{d}S.$$

La carga que cruza dS cada segundo se obtiene multiplicando por la carga q de cada partícula:

$$qnv\mathrm{d}S=\rho_l v\mathrm{d}S.$$

Donde $qn=\rho_l$ (rho subele) se llama *densidad de carga libre*. La intensidad a través de cada unidad de superficie perpendicular a v, que se designa por j, se obtiene dividiendo por dS; es decir,

$$j = \rho_l v$$

En el Sistema Internacional, q se mide en C/partícula, n son partículas/m^3 y v m/s, resultando ρ_l en C/m^3 y j en C/(m^2s)=A/m^2.

Que ρ_l no sea nula en un punto no significa que el conductor esté cargado en ese punto, pues la densidad de carga ligada puede ser igual a ρ_l. De hecho, como veremos, eso es lo que habitualmente ocurre en los conductores: la densidad de carga libre es la misma que la de carga ligada en cada punto, de forma que el conductor permanece en estado neutro.

Conviene definir un campo vectorial así:

$$\boldsymbol{j}=\rho_l \boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{j}$ resulta un vector cuyo módulo es $qnv=\rho_l v$ de la misma dirección y sentido que la velocidad de arrastre. Se llama *densidad de corriente,* pues su módulo vale, en cada punto, la intensidad que, por cada unidad de superficie, atraviesa una superficie perpendicular a la velocidad de arrastre.

Como

$$\boldsymbol{v}=\mu \boldsymbol{E},$$

queda:

$$\boldsymbol{j}=qn\mu\boldsymbol{E}=\rho_l\mu\boldsymbol{E}.$$

A

$$\sigma=qn\mu=\rho_l\mu.$$

se da el nombre de *conductividad* de las partículas de que se trate. σ es, a través de n y μ, una característica de las partículas y del medio donde tiene lugar la conducción. Resulta

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}.$$

Si las cargas libres son negativas, μ y q también lo son, por lo que $\sigma=qn\mu$ siempre es positiva y $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$ siempre tiene el sentido de $\boldsymbol{E}$. Es esta una característica de la conducción eléctrica que conviene resaltar: *cualquiera que sea el signo de la carga de los portadores, la densidad de corriente a que dan lugar siempre tiene el sentido del campo.*

En algunos medios, como los semiconductores y disoluciones, existen a la vez partículas libres positivas y negativas. Al aplicar un campo eléctrico, la corriente eléctrica a que dan lugar tiene el mismo sentido, por lo que la densidad de corriente total debida a ambos tipos de partículas es simplemente la suma:

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_\mathrm{p}+\boldsymbol{j}_\mathrm{n}=\sigma_\mathrm{p}\boldsymbol{E}+\sigma_\mathrm{n}\boldsymbol{E}=(\sigma_\mathrm{p}+\sigma_\mathrm{n})\boldsymbol{E}=\sigma\boldsymbol{E}.$$

σ es la conductividad del medio, y es la suma de las conductividades de ambos tipos de partículas:

$$\sigma=\sigma_p+\sigma_n$$

Si el número de portadores fuera superior a dos, la conductividad del medio sería

$$\sigma = \sum_k \sigma_k$$

donde cada σ_k vale

$$\sigma_k = q_k n_k \mu_k = \rho_k \mu_k$$

q_k es la carga de cada tipo de partícula libre, n_k es la concentración y μ_k es la movilidad. Si q_k es negativo μ_k también lo es, y la conductividad siempre es positiva.

La fórmula $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$. se llama ley de Ohm y expresa que la densidad de corriente en cada punto de un conductor isótropo tiene la misma dirección y sentido que el campo que la origina. Los cuerpos que la cumplen se llaman medios isótropos. Entre ellos se encuentran la mayoría de los conductores utilizados, en especial los metales. La conductividad σ puede ser función del módulo del campo eléctrico. Si no lo es, el conductor se llama conductor lineal o conductor óhmico. El inverso de la conductividad se llama resistividad: $\rho = 1/\sigma$.

En realidad, dependiendo de los conductores, la relación entre $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{E}$ puede ser más compleja, aunque en ella siempre aparecerá $\boldsymbol{E}$ como causa de $\boldsymbol{j}$. En particular, se llaman *conductores no isótropos* los conductores en los que la relación entre las tres componentes de $\boldsymbol{j}$ según los tres ejes x, y, z y las tres de $\boldsymbol{E}$ es $j_h = \sigma_h^k E_k = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{hk} E_k = [\sigma][E]$[8]. Pero los conductores eléctricos más usados en ingeniería son los isótropos, los que cumplen la fórmula $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$. En lo que sigue nos referiremos exclusivamente a ellos.

A temperatura ambiente todos los cuerpos tienen cargas libres. Por eso la clasificación real en mejores o peores conductores y mejores o peores aislantes se basa en la conductividad. Cuanto mayor sea σ, mejor conductor y peor aislante es el material. En los aislantes sólidos la concentración de electrones libres es muy pequeña comparada con la concentración de electrones libres de los metales, por lo que, según las fórmulas anteriores, su conductividad también lo es. En los fluidos aislantes la concentración de iones de ambos signos es también pequeña. Hay aceites muy buenos aislantes que se utilizan para refrigerar máquinas eléctricas, principalmente transformadores. El aire no es un mal aislante.

Ecuación de continuidad

El módulo de $\boldsymbol{j}$ es, en cada punto del conductor, la intensidad por unidad de superficie perpendicular a $\boldsymbol{j}$ en ese punto. Por tanto (fig. 4 a), la intensidad por una superficie d$\boldsymbol{S}$, que forma un ángulo α con $\boldsymbol{j}$, es

$$\mathrm{d}i = \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = j\,\mathrm{d}S\cos\alpha$$

---

8 Esta fórmula es la misma que $[j] = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{21} & \sigma_{21} \\ \sigma_{31} & \sigma_{31} & \sigma_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = [\sigma][E]$. La matriz $[\sigma]$ se llama *tensor conductividad*.

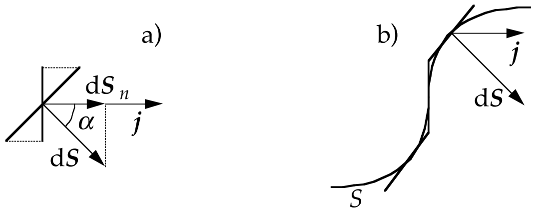

Fig. 4.- Intensidad a través de superficies en función de la densidad de corriente.

La intensidad en una superficie S como la de la figura 4b) puede hallarse aproximándola por trozos de superficies planas como allí se representa. La intensidad en cada trozo es aproximadamente

$$\mathrm{d}i = \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

si $\boldsymbol{j}$ es la densidad de corriente en el centro de d$\boldsymbol{S}$[9]. La suma de las intensidades di de todos los trozos planos de superficie es aproximadamente la intensidad a través de la superficie S. Esta aproximación es total en el límite, cuando la superficie de cada trozo tiende a cero y el número de trozos planos a infinito. Si ese límite existe se llama flujo de $\boldsymbol{j}$ a través de la superficie S y se designa por la expresión

$$i = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

de forma que *la intensidad a través de una superficie S es el flujo de* ***j*** *a través de esa superficie*.

En lo que sigue utilizaremos el axioma de la conservación de la carga: que la carga eléctrica no se crea ni se destruye ni se transforma. Eso significa que la carga de un volumen (la suma de la positiva y negativa) solo se modifica si sale o entra carga en ese volumen, es decir, si la intensidad a través de la superficie cerrada que lo limita no es cero en algún momento.

Supongamos ahora un conductor y una superficie cerrada S en su interior. Llamaremos v al volumen limitado por esa superficie y ρ a la densidad de carga en cada punto del conductor. Esta densidad de carga es la debida a todas las cargas, tanto a las libres como a las ligadas; por tanto su valor puede ser cero. La carga encerrada en el volumen v en cada instante es

$$q = \int_v \rho \, dv$$

Como la carga q del volumen está formada también por cargas libres, puede salir o entrar carga en dicho volumen. Si en cada instante sale carga del volumen v, hay una intensidad a través de la superficie S que lo limita. Por el axioma de conservación de la carga, esta intensidad, es decir, la carga que sale cada segundo, es igual a lo que disminuye en el interior cada segundo; o sea,

$$i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho \, \mathrm{d}v = -\int_v \frac{\delta\rho}{\delta t}\mathrm{d}v$$

Al introducir la derivada dentro de la integral y derivar la densidad de carga ρ, se transforma en derivada parcial porque ρ puede ser también función de las coordenadas x, y, z, es decir, puede ser distinta en cada punto del conductor, pero solo hay que derivar respecto al tiempo, por ello la derivada debe ser parcial.

---

[9] En realidad basta que $\boldsymbol{j}$ sea la densidad de corriente de un punto cualquiera de la superficie d$\boldsymbol{S}$, ya que, al tender dS a cero, $\boldsymbol{j}$ queda unívocamente determinada.

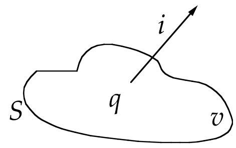

Fig. 5.- La carga que sale cada segundo coincide con la que disminuye cada segundo en el interior.

Por otra parte, la intensidad i es el flujo de $\boldsymbol{j}$ a través de la superficie cerrada que limita el volumen v; o sea,

$$i = \oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_v \nabla \cdot \boldsymbol{j}\ \mathrm{d}v$$

Se ha utilizado el teorema de la divergencia[10]. Igualando los últimos miembros de las dos expresiones anteriores resulta:

$$\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{j}\ \mathrm{d}v = -\int_v \frac{\delta\rho}{\delta t}\mathrm{d}v$$

El volumen v en que se integran las dos expresiones de los dos miembros es el mismo; pero, a la vez, es cualquier volumen del conductor, por lo que la igualdad solo puede cumplirse si los dos integrandos son idénticos, o sea, si

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\delta\rho}{\delta t}$$

o bien,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\delta\rho}{\delta t} = 0$$

Esta fórmula se llama *ecuación de continuidad* y, si el lector vuelve a repasar su obtención, se dará cuenta de que solo es una forma de escribir que las cargas que salen cada segundo por la superficie cerrada S son las que desaparecen del volumen interior limitado por S. Realmente es una forma de expresar la conservación de la carga eléctrica: en ningún volumen v, del conductor se crea ni se destruye carga, sino que, si en algún volumen aumenta es porque ha entrado por la superficie que lo limita, y si disminuye es porque ha salido[11].

Corrientes estacionarias

En un volumen v de un conductor la carga puede aumentar porque haya habido más carga que ha entrado en él que la que ha salido, o viceversa. Es decir, puede haber *condensaciones* o *enrarecimientos* de carga. La densidad de carga aumenta donde se condensa y disminuye donde se enrarece, o sea, ρ en cada punto puede variar con el tiempo.

---

10 Que dice que el flujo de un campo vectorial, por ejemplo $\boldsymbol{j}$, a través de la superficie cerrada S, es igual a la integral en el volumen v limitado por dicha superficie, de la divergencia de $\boldsymbol{j}$.

11 En un medio donde existieran zonas (volúmenes) en las que se crearan cargas libres o, por el contrario, desaparecieran, la ecuación de continuidad no se cumpliría en los puntos de esas zonas, pues podría salir carga del volumen sin que disminuyera dentro, porque se crea carga. Las zonas donde se creara carga se llamarían *fuentes*, y donde desapareciera *sumideros*. Por eso la ecuación de continuidad equivale a decir que *en el Universo no existen fuentes ni sumideros de carga eléctrica*, que es otra forma de decir que la carga eléctrica total del universo (suma de la positiva y la negativa) no varía, se conserva.

Sin embargo muchas de las corrientes eléctricas que creamos en los conductores se producen muy ordenadamente, de forma que no se originan condensaciones ni enrarecimientos y, por tanto, la carga total en cualquier volumen permanece constante, porque la intensidad que entra por un lado sale por otro (fig. 6). Es decir, ρ es constante en cada punto del conductor. Por tanto, para ese tipo especial de corrientes,

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} = 0$$

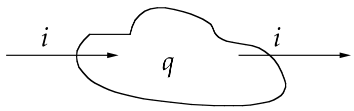

Fig. 6.- Si la corriente es estacionaria, la misma carga que entra en cualquier volumen sale de él cada segundo.

Estas corrientes se llaman *corrientes estacionarias*; se producen de forma que *la derivada parcial de la densidad de carga respecto al tiempo es cero* en todos los puntos del conductor. Por tanto, para ellas la ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

Esta es una definición equivalente de corrientes estacionarias, *aquellas corrientes eléctricas tales que la divergencia de la densidad de corriente es nula* en todos los puntos del conductor. Esta es la manera formal de decir que la corriente es tan ordenada que no produce condensaciones ni enrarecimientos de carga, ni siquiera de corta duración. También equivale a decir que la intensidad a través de cualquier superficie cerrada es nula. En efecto, la intensidad a través de una superficie cerrada S que limita al volumen v, es

$$\mathrm{i} = \oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}S = \int_\mathrm{v} \nabla \cdot \boldsymbol{j} \, \mathrm{d\,v} = 0$$

Se ha utilizado el teorema de la divergencia y que la divergencia de $\boldsymbol{j}$ es nula en todo punto del conductor.

Todas las corrientes eléctricas que se emplean para transportar energía, que son las de intensidad constante o lentamente variable con el tiempo, entre las que se incluyen las corrientes alternas de 50 ó 60 Hz, son muy aproximadamente corrientes estacionarias. De ahora en adelante nos referiremos exclusivamente a ellas.

Intensidad en tubos de corriente

Se llaman líneas de fuerza de un campo vectorial a aquellas que, en cada punto, son tangentes al campo. En un conductor en el que hay corriente eléctrica, la densidad de corriente es un campo vectorial. Las líneas de fuerza de ese campo, líneas de fuerza de la densidad de corriente, se llaman *líneas de corriente*, pues son las líneas que seguirían las cargas libres del conductor si se movieran con la velocidad de arrastre. Asimismo, los tubos de fuerza de $\boldsymbol{j}$ se llaman *tubos de corriente*. En la figura 7 se representa un tubo de corriente en el que supondremos que las cargas positivas se mueven hacia la derecha. Como en todo tubo de fuerza, la superficie lateral está formada por las líneas de fuerza contenidas en ella; o, dicho de otra manera, las líneas de corriente no atraviesan la superficie lateral del tubo. Eso quiere decir que *nunca hay* paso de cargas ni, por tanto, *corriente a través de la superficie lateral de un tubo de corriente*.

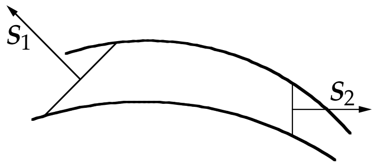

Fig. 7.- La intensidad en cualquier superficie limitada por un tubo de corriente estacionaria es la misma.

Pero además, si nos fijamos en el volumen limitado por la superficie lateral del tubo y las superficies S_1 y S_2 por él limitadas, la intensidad total que sale (o entra) de ese volumen es cero. Lo que quiere decir que, como no salen cargas por la superficie lateral, la carga que en cada segundo cruza S_1 hacia la derecha, debe salir, cruzándola hacia la derecha, por S_2, también cada segundo. Es decir, en cualquier superficie limitada por un tubo de corriente estacionaria la intensidad es la misma: la misma por S_1 que por S_2.

Hay otra manera de llegar al mismo resultado. El punto de partida es la definición formal de corriente estacionaria:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

La intensidad a través de la superficie cerrada limitada por el tubo y las superficies S_1 y S_2 es el flujo de $\boldsymbol{j}$, es decir,

$$i = \oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{S_L} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{S_1} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{S_2} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = i_{S_1} + i_{S_2}$$

i_{S1} e i_{S2} son las intensidades a través de las superficies S_1 y S_2 hacia fuera del volumen. La integral en la superficie lateral S_L del tubo es cero, pues $\boldsymbol{j}$ es tangente en cada punto a la superficie lateral. Aplicando el teorema de la divergencia,

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_v \nabla \cdot \boldsymbol{j} \;\, \mathrm{d}v \;= 0$$

porque $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$. De aquí,

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = i_{S1} + i_{S2} = 0$$

O sea,

$$-i_{S1} = i_{S2}$$

Es decir, la intensidad que en cualquier instante sale del volumen por S_2 (hacia la derecha de S_2) es opuesta a la que sale del volumen por S_1.

Si llamamos i_1 e i_2 a las intensidades hacia la derecha de S_1 y S_2 respectivamente, resulta:

$$i_1 = -i_{S1} \quad \text{e} \quad i_2 = i_{S2}$$

Por lo que

$$i_1 = i_2$$

O sea, *en cualquier superficie limitada por un tubo de corriente (y, por tanto, en cualquier sección de un tubo de corriente) la intensidad en cada instante es la misma*[12]. Así que se puede hablar sin ambigüedad de la *intensidad de un tubo de corriente*, entendiendo por tal la de cualquier superficie limitada por él.

[12] Todo campo vectorial de divergencia nula tiene las mismas propiedades: flujo del campo a través de cualquier superficie cerrada nulo y, por tanto, el flujo a través de cualquier superficie limitada por un tubo de fuerza es el mismo.

Los conductores metálicos en forma de hilo, que son muy utilizados en Electrotecnia, son tubos de corriente, ya que, en condiciones habituales de funcionamiento, las cargas no pasan a través de la superficie lateral debido a la alta resistividad del aire o de los aislantes en que se envuelven, resultando que la intensidad en cualquier sección del hilo es la misma en cada instante, y se puede hablar por ello de la *intensidad de un conductor filiforme*.

Primera ley de Kirchhoff[13]

En muchas de las aplicaciones de la Electricidad las corrientes eléctricas se originan en conductores metálicos en forma de hilo. Cuando extremos de varios conductores se conectan se forma un *nudo*. (fig. 8). Si rodeamos el nudo por una superficie cerrada imaginaria, si las corrientes son estacionarias, la intensidad que sale o entra en el volumen limitado por la superficie es cero. Pero como solo entra o sale corriente por los conductores filiformes, resulta que, en cada instante, la suma de las intensidades que entran por los conductores en el volumen es igual a cero: $i_1-i_2+i_3-i_4-i_5-i_6=0$ (las intensidades que *entran* al nudo de la figura 8 son i_1, $-i_2$, i_3, $-i_4$, $-i_5$ y $-i_6$). El enunciado de este hecho se llama *primera ley de Kirchhoff*: *si todas las corrientes son estacionarias, la suma de las intensidades que llegan a un nudo es cero*. O, multiplicando por menos uno, *la suma de las intensidades que salen de un nudo es cero*.

$$\sum_{h=1}^{n} i_h = 0$$

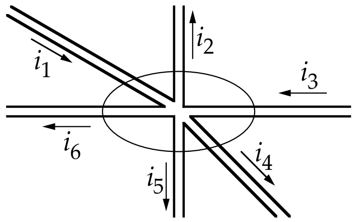

Fig. 8.- La primera ley de Kirchhoff es una propiedad de las corrientes estacionarias.

La figura 9 representa un volumen que encierra un objeto cualquiera conteniendo lo que se desee, (materiales conductores o no, aparatos eléctricos con aislantes o no, etc.) al que llegan *n* hilos conductores. Siempre que las corrientes sean estacionarias, como en el volumen no puede aumentar ni disminuir la carga eléctrica, la primera ley de Kirchhoff puede enunciarse así: la suma de las intensidades de las corrientes que llegan (o se alejan) a (o de) un volumen es cero:

$$\sum_{h=1}^{n} i_h = 0$$

---

[13] Gustav Robert Kirchhoff (1824-87), nació y estudió en Königsberg, antigua capital de Prusia Oriental, hoy ciudad rusa de nombre de Kaliningrado. Fue profesor de las universidades de Breslau, Heidelberg y Berlín. Enunció las dos leyes eléctricas que llevan su nombre y junto a Bunsen inventó el espectroscopio, con el que descubrieron el cesio y el rubidio.

[14] Gustav Robert Kirchhoff (1824-87), nació y estudió en Königsberg, antigua capital de Prusia Oriental, hoy ciudad rusa de nombre de Kaliningrado. Fue profesor de las universidades de Breslau, Heidelberg y Berlín. Enunció las dos leyes eléctricas que llevan su nombre y junto a Bunsen inventó el espectroscopio, con el que descubrieron el cesio y el rubidio.

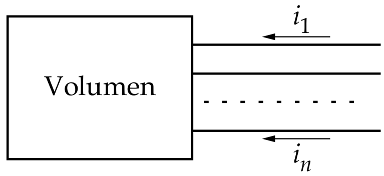

Fig. 9.- La suma de las intensidades que llegan a un volumen es cero.

Insistiremos en que solo las corrientes estacionarias cumplen la primera ley de Kirchhoff.

Resistencia

Cuando se aplica la ley de Ohm a un conductor óhmico filiforme, se obtiene una relación entre la diferencia de potencial entre sus extremos y la intensidad que circula por el conductor, que vamos a deducir.

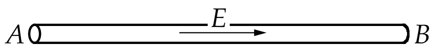

Fig. 10.- En un hilo conductor homogéneo un campo uniforme produce una corriente estacionaria.

La figura 10 representa un hilo conductor de sección uniforme, homogéneo respecto a la resistividad, rodeado de aislante, que puede ser el aire. Supongamos un campo electrostático $\boldsymbol{E}$ uniforme en la dirección de su eje. Por tanto la diferencia de potencial V_A-V_B=V_{AB} entre los extremos A y B es

$$V_{AB} = El;$$

l es la longitud del hilo[15].

En cada punto del conductor se cumple la ley de Ohm:

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$$

Como $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{E}$ tienen la misma dirección y sentido, también se cumple la relación entre módulos:

$$j=\sigma E$$

Multiplicamos los dos miembros por la longitud l y por la sección s del hilo:

$$lsj=\sigma slE$$

$sj=i$ es la intensidad por cualquier sección del hilo, y $lE=V_{AB}$. Por tanto,

$$li=\sigma sV_{AB}$$

Despejando i,

$$i = \frac{V_{AB}}{\dfrac{l}{\sigma s}} = \frac{V_{AB}}{\rho\dfrac{l}{s}}$$

Donde

[15] Recuérdese que dV=-Edl. Integrando, y teniendo en cuenta que E no depende de l, resulta V_{AB}=El.

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

se llama resistividad. Como se ve, la cantidad

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

depende solo del hilo. Se llama *resistencia eléctrica* de dicho hilo. Sustituyendo, resulta:

$$i = \frac{V_{\mathrm{AB}}}{R}$$

o bien, llamando a V_{AB} simplemente V,

$$i = \frac{V}{R}$$

Esta fórmula se llama *ley de Ohm* para los conductores filiformes. De ella se deduce que la unidad de resistencia es el V/A (voltio[16] por amperio), que se llama ohmio[17] y se representa en el Sistema Internacional por la letra griega omega mayúscula Ω. Como

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

despejando ρ se deduce que la unidad de resistividad es el $\Omega\mathrm{m}^2/\mathrm{m}=\Omega\mathrm{m}$, y la de conductividad el $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. En el Sistema Internacional de Unidades el Ω^{-1} se llama siemens, de símbolo S, por lo que la unidad de conductividad es el S/m (siemens por metro).

Conviene aclarar que, cuando se habla del potencial del extremo A de un hilo, se entiende que todos los puntos de la sección recta que contiene al punto A tienen el mismo potencial. De hecho, esta situación es la que se produce en la práctica, por eso puede hablarse de diferencia de potencial entre los extremos de un hilo de sección no despreciable.

La hipótesis de campo uniforme utilizada es una condición necesaria (y suficiente) para que la corriente en el hilo uniforme sea estacionaria, ya que, en un hilo conductor homogéneo de sección uniforme, solo un campo uniforme produce una corriente estacionaria, pues, al ser un tubo de corriente, la intensidad $i=js$ en cada sección recta debe ser la misma; como todas las secciones rectas son iguales, también lo es j en cada punto y, como $j=\sigma E$, y σ es la misma en todos los puntos, también E lo es.

Un campo electrostático uniforme en un conductor uniforme y homogéneo no requiere una distribución especial de su carga libre. En efecto: la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

aplicada a nuestro caso de campo en la dirección l toma la forma[18],

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

---

16 En honor al italiano Alessandro Volta (1745-1827), profesor de la Universidad de Pavía que, entre otras aportaciones, inventó la pila eléctrica.

17 Se llama así desde 1861 por Georg Simon Ohm (1787-1854), que nació y estudió en Erlangen(Alemania); fue profesor en Colonia, Berlín, Nurenberg y en la universidad de Munich. En 1827 descubrió la ley eléctrica que lleva su nombre, la ley de Ohm.

18 Ahora ρ vuelve a designar aquí la densidad volúmica de carga.

pero como E es uniforme, no depende de l y la derivada es cero, por lo que la densidad de carga también lo es: no hay ningún exceso de carga en ningún punto del interior del conductor, es decir, la distribución de carga en el conductor cuando circula por él una corriente estacionaria es la misma que en el equilibrio electrostático, o sea, densidad de carga interior nula. Dicho de otro modo: si obtuviéramos una fotografía instantánea, la distribución de las cargas en el conductor que aparecería en la fotografía sería la misma que en equilibrio electrostático. Eso quiere decir que las cargas que se van desplazando van siendo inmediatamente reemplazadas, como si se tratara de un fluido incompresible[19].

Volviendo a la resistencia, el hilo conductor establece una relación fija entre la diferencia de potencial entre sus extremos y la intensidad que pasa por él:

$$i = \frac{V}{R}; \qquad V = Ri$$

Por eso, *el concepto de resistencia se extiende a cualquier objeto con dos extremos, que llamaremos terminales, que, cuando existe entre ellos una diferencia de potencial V, circula por el objeto una intensidad i, de forma que existe un número real positivo R tal que i=V/R o, lo que es equivalente, V=Ri.* El símbolo de una resistencia, es el de la figura 11.

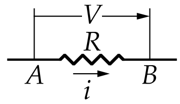

Fig. 11.- Símbolo de la resistencia eléctrica $R=V/i$.

La figura 11 es la representación de la figura 10. Los puntos A y B son los mismos en las dos figuras, aunque en la 11 todo el segmento a la izquierda de la resistencia ha de considerarse el punto A y todo el segmento a la derecha de la resistencia el punto B. En otras palabras, en las representaciones esquemáticas, se considera toda la resistencia concentrada y el resto de las líneas hilos sin resistencia. Se ha llamado ahora V a la diferencia de potencial V_{AB}. Con la notación primitiva, V_A-V_B=V_{AB}, el sentido que se toma como positivo para la diferencia de potencial lo indica el orden de subíndices, de forma que si V_{AB} es un número positivo, por ejemplo 5, significa que A tiene 5 V más que B; si V_{AB} vale -5 V, significa que A tiene 5 V menos que B. En la notación de la figura 11 se han suprimido los subíndices, pero se ha añadido una flecha que indica el sentido positivo de la diferencia de potencial: el de los potenciales decrecientes. Así, con una representación como la de la figura 11, cuando V es positivo, por ejemplo 5 V, A tiene 5 V más que B. Cuando V es negativo, A tiene menor potencial que B. En resumen, la flecha indica el sentido natural de la corriente, o sea, el sentido de la corriente cuando V es positivo. Asociado de forma natural a ese sentido de la diferencia de potencial, está el sentido que se toma como positivo para la intensidad i. Solo con esos sentidos, que se corresponden, la figura 11 sirve como definición general de resistencia como la relación $v/i=R$. Entonces R es siempre un número real positivo que, en el caso de que el material que constituye la resistencia[20] sea lineal (σ no depende de E), no depende de la intensidad i. Si el material es no lineal, R depende de i.

[19] El símil del fluido incompresible es muy útil para los que comienzan el estudio de las corrientes estacionarias: las cargas se mueven en los conductores como el agua en una tubería llena: en cuanto comienza a entrar por un extremo del tubo lleno sale por el otro la misma cantidad aunque la velocidad de las moléculas del agua sea pequeña.

[20] En español la palabra *resistencia* designa tanto al número real $v/i=R$ como al objeto material de dos terminales.

El inverso de R, $G=1/R=i/V$ se llama *conductancia*. Su unidad es el Ω^{-1}, que se llama *siemens*, de símbolo S.

Fig. 12.- Hilo conductor de resistividad y sección dependiente de x.

En los párrafos anteriores hemos encontrado la resistencia de un hilo conductor en función de sus características (resistividad, longitud y sección), pero solo cuando es homogéneo y de sección uniforme. Hilos de estas características son continuamente utilizados en Electrotecnia; pero, para algunas aplicaciones, es conveniente considerar hilos de resistividad y sección no uniformes como el de la figura 12. Consideraremos, no obstante, homogeneidad transversal, es decir, que en cualquier punto de una sección recta del conductor la resistividad es la misma y el potencial también. Resulta entonces que el campo es perpendicular a esa sección, paralelo al eje X en la figura 12. Estas hipótesis son bastante adecuadas cuando la sección del conductor cambia suavemente a lo largo de la longitud. Entonces, para cada punto del conductor, $\boldsymbol{j}$, tiene por módulo

$$j = \sigma E = -\sigma \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

el mismo también en todos los punto de cada sección recta.

$$-\mathrm{d}V = \frac{j}{\sigma}\mathrm{d}x = \rho j\,\mathrm{d}x$$

Multiplicando y dividiendo por la sección en el punto x:

$$-\mathrm{d}V = \rho j\, s\frac{\mathrm{d}x}{s}$$

$js=i$ es la intensidad en la sección s, la intensidad del conductor. Por tanto,

$$-\mathrm{d}V = \rho i\,\frac{\mathrm{d}x}{s}$$

integrando entre A y B resulta:

$$V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}} = i\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\rho}{s}\mathrm{d}x = Ri$$

con

$$R = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\rho}{s}\mathrm{d}x$$

Si ρ y s no dependen de x,

$$R = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\rho}{s}\mathrm{d}x = \frac{\rho}{s}(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) = \rho\frac{l}{s}$$

Si la resistencia no es un hilo homogéneo o no tiene forma regular o no se conocen sus características (longitud, sección y resistividad del material), puede hallarse el valor de R experimentalmente dividiendo la diferencia de potencial V entre la intensidad por ella: $R=V/i$.

No solo se construyen resistencias de hilos de diferentes aleaciones metálicas, sino también de otros materiales, como carbón y cerámicos; así se consiguen valores del orden de kΩ y MΩ.

Clasificación de los materiales atendiendo a su conductividad

Los medios en los que σ es uniforme se llaman *homogéneos* respecto a la conductividad[21]. Si σ no es uniforme se llaman *inhomogéneos* o no homogéneos.

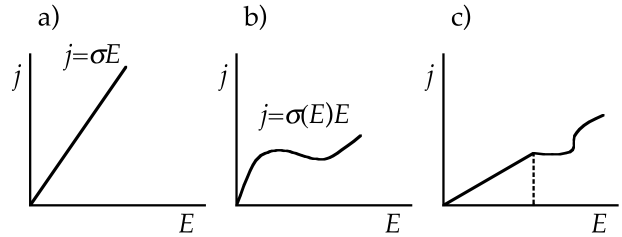

Fig. 4.- a) Medio lineal. b) Medio no lineal. c) Medio lineal hasta un determinado valor de E.

Hay materiales en los que σ no depende del campo aplicado. Se les llama medios *lineales*[22], pues en ellos el módulo de la densidad de corriente es una función lineal del módulo del campo eléctrico. Los materiales en los que σ depende del módulo de $\boldsymbol{E}$ se llaman *no lineales*. Muchos materiales tienen un comportamiento sensiblemente lineal para determinado conjunto de valores de E y claramente no lineal para otros (fig. 4).

El valor de la resistividad de los materiales permite clasificarlos en buenos conductores, semiconductores y buenos aislantes. Un buen conductor tiene una resistividad que oscila entre 10^{-5} y 10^{-6} Ωcm, es decir, una conductividad de 10^5 a 10^6 S/cm. Los conductores metálicos utilizados en ingeniería están dentro de esos límites. Tan buena conductividad se debe a la elevada concentración de portadores, que en los metales son electrones. Por ejemplo, si se supone que cada átomo de cobre contribuye a temperatura ambiente con un solo electrón libre, la concentración de portadores en un conductor de cobre es de 8.45×10^{22} electrones libres/cm^3, cantidad extraordinariamente alta[23].

Tabla 1.- Resistividades y coeficientes de temperatura aproximados de algunos materiales a 20°C.

Material	Resistividad ρ en Ωm.	Coeficiente de temperatura α en K^{-1}.
Aluminio	$2{,}7 \times 10^{-8}$	0.004
Azufre	2×10^{15}	
Baquelita	2×10^{5}-2×10^{14}	
Cinc	6×10^{-8}	0.004
Cobre	$1{,}72 \times 10^{-8}$	0.004
Constantán (Cu 60%, Ni 40%)	$49{,}0 \times 10^{-8}$	0.000002
Cuarzo	1×10^{13}	
Ebonita	10^{13}-10^{16}	
Germanio puro	0.046×10^{-8}	-0.048

21 El adjetivo homogéneo se aplica referido a cualquier variable. Un cuerpo, material o medio es homogéneo respecto a una variable, como la temperatura, densidad, conductividad, etc., si el valor de esa variable es el mismo en todos los puntos del medio, es decir, que no depende de las coordenadas espaciales x, y, z, aunque puede depender de otras, como por ejemplo el tiempo, el grado de humedad, etc. De la variable respecto a la cual el cuerpo es homogéneo se dice que es uniforme (decir que es constante significa más bien que no depende del tiempo). Un cuerpo puede ser homogéneo respecto a una variable y no serlo respecto a otra.

22 También se llaman *medios óhmicos*.

23 La población mundial es menos que $1/10^{12}$ de esa cantidad.

Grafito	1.4×10^{-5}	
Hierro	9.7×10^{-8}	0.006
Madera	10^{8}-10^{11}	
Manganina (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)	44×10^{-8}	0.000000
Mercurio	96×10^{-8}	0.001
Mica	10^{11}-10^{15}	
Nicrom	100×10^{-8}	0.0004
Níquel	6.8×10^{-8}	0.007
Oxido de aluminio	1×10^{14}	
Oro	2.3×10^{-8}	0.004
Plata	1.6×10^{-8}	0.004
Plomo	21×10^{-8}	0.004
Vidrio	10^{10}-10^{14}	
Wolframio	5.5×10^{-8}	0.005

La resistividad de los semiconductores intrínsecos de uso habitual, a la temperatura ambiente, va desde los 10^{-3} a 10^{5} Ωcm, lo que da una conductividad de 10^{3} a 10^{-5} S/cm. Valores típicos a temperatura ambiente de la concentración de portadores, que en ellos son electrones libres y huecos[24], son del orden de 10^{13} en el germanio y 10^{10} electrones/cm^{3} en el silicio. La concentración es la misma para los huecos.

La elevación de temperatura aumenta, en general, la concentración de portadores. Por el contrario, disminuye su movilidad. En los buenos conductores metálicos, el aumento de la concentración de electrones libres al aumentar la temperatura es inapreciable, por lo que influye más la disminución de la movilidad en el valor final de *la conductividad*, que, como resultado, *disminuye en los metales al aumentar la temperatura*.

En semiconductores como el germanio y el silicio, sin embargo, el aumento relativo de portadores con la temperatura es importante, por lo que este aumento influye más en el valor final de la conductividad que la disminución de la movilidad. El resultado es que la *conductividad de los semiconductores aumenta con la temperatura*[25].

Por último, la resistividad en los dieléctricos reales llega a alcanzar valores de 10^{18} Ωcm, que equivale a una conductividad de 10^{-18} S/cm.

Tabla 2.- Rigidez dieléctrica aproximada de algunos materiales.

Material	Rigidez dieléctrica en V/m
Aire a la presión normal	3×10^{6}
Nailon	19×10^{6}
Oxido de aluminio	6×10^{6}
Polietileno	18×10^{6}
Vidrio	9×10^{6}

24 Equivalentes a partículas cargadas positivamente.

25 Recordemos que $\sigma_n = qn\mu_n$. La concentración *n* de electrones libres aumenta apreciablemente con el aumento de la temperatura; aunque μ_n disminuye, el resultado final es que σ_n aumenta con la temperatura en los semiconductores. Lo mismo para los huecos.

Los valores citados solo son válidos para campos moderados, entendiendo como tales los que no arrancan electrones de los átomos ni directamente ni por choque de otros electrones; es decir, campos de valor menor que la *rigidez dieléctrica* del material. Si en un semiconductor o dieléctrico sólidos se aumenta el campo ilimitadamente, se llega a un valor, que depende de cada material, para el que el campo arranca directamente electrones ligados a los átomos y aumentan así los electrones libres. Además, debido al gran valor del campo, los electrones libres se aceleran de tal manera que, cuando chocan con los átomos de la red, arrancan nuevos electrones. El aumento por alguna de estas dos razones o por las dos de la concentración de portadores, hace que el semiconductor o dieléctrico pase a comportarse bruscamente como conductor, y la fuerte corriente que se origina, si no se controla, puede provocar aumentos locales de temperatura que lo dañen. En algunos casos aparecen orificios y partes de material quemado. Cuando esto ocurre se dice, especialmente hablando de aislantes, que el material se ha perforado. El mayor campo eléctrico que puede aplicarse sin que se produzca la perforación se denomina *rigidez dieléctrica* del material de que se trate. En los gases, incluido el aire, un aumento progresivo del campo produce, para un valor determinado de este y por los mismos mecanismos, la ionización del gas y la conducción brusca con aparición del arco eléctrico. El mayor valor posible del campo sin aparición del arco eléctrico es la rigidez dieléctrica del gas de que se trate. De forma similar para los líquidos[26] .

La resistividad de los metales

La conductividad de los metales disminuye cuando aumenta su temperatura, o, lo que es equivalente, *aumenta la resistividad cuando aumenta su temperatura. El incremento relativo de la resistividad por cada grado que aumenta la temperatura se llama coeficiente de temperatura*:

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T}$$

su valor para los metales muy puros es próximo a 1/T (T es la temperatura absoluta del metal)[27]. Se tiene:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T}; \quad \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}; \quad \ln T + \ln k = \ln\rho; \quad \rho = kT$$

resultando su resistividad proporcional a la temperatura absoluta. No obstante, para pequeñas variaciones de temperatura, puede considerarse α constante, con lo que

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T}; \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \alpha\ \mathrm{d}T; \quad \ln\rho - \ln K = \alpha T; \quad \frac{\rho}{K} = e^{\alpha T}$$

$$\rho = K\,\mathrm{e}^{\alpha T} = K\,\mathrm{e}^{\alpha(273+t)} = \rho_0 \mathrm{e}^{\alpha t}$$

Se ha tenido en cuenta que ρ_0=$K\mathrm{e}^{273\alpha}$ es la resistividad a 0°C. En vez de la fórmula deducida, se prefiere a menudo la aproximada por los dos primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor:

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha t} \cong \rho_0 + \rho_0\alpha t = \rho_0(1+\alpha t)$$

[26] Los aceites que se utilizan como refrigerantes en algunos tipos de transformadores deben ser aislantes y de alta rigidez dieléctrica.

[27] A 20°C 1/T=1/293=0,0034, valor muy próximo a los experimentales de los metales puros tales como el aluminio, cinc, cobre, oro y la plata que aparecen en la tabla 1.

que, por comodidad, es muy usada en ingeniería para obtener resistividades de metales a la temperatura centígrada t.

El papel de referencia que juega la temperatura de 0° C en la fórmula anterior puede desempeñarlo cualquier otra. Si esta es t_1 resulta:

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha t} = \rho_0 e^{\alpha(t_1+\Delta t)} = \rho_1 e^{\alpha\Delta t} \cong \rho_1 + \rho_1\alpha\Delta t = \rho_1(1+\alpha\Delta t)$$

donde $\Delta t = t - t_1$.

La adición de pequeñas proporciones de impurezas a los metales puros siempre aumenta la resistividad, aunque no el coeficiente de temperatura. De hecho pueden conseguirse aleaciones con muy bajos coeficientes de temperatura, aunque su resistividad será siempre mayor que la del metal base. En la tabla 1 puede verse cómo el constantán, aleación de cobre y níquel, tiene una alta resistividad, pero un coeficiente de temperatura muy bajo. Lo mismo puede decirse de la manganina, de coeficiente de temperatura nulo hasta la sexta cifra significativa.

Potencia de la corriente eléctrica

La teoría de la corriente eléctrica que venimos desarrollando parte de un material conductor y, en él, por medio de un campo, se mueven las cargas libres. Esto significa que la fuerza, el campo, realiza un trabajo sobre cada partícula cargada, que se acelera y aumenta su energía cinética hasta que choca contra algún átomo del conductor. Entonces cede parte de la energía adquirida, y vuelve a ser acelerada de nuevo, y así sucesivamente. El resultado es que, cuando cesa el campo, toda la energía que ha comunicado a las cargas ha pasado al conductor, que, por este motivo, aumenta su energía interna y, por tanto, su temperatura. Las cargas libres vuelven al estado de movimiento aleatorio exclusivo que tenían antes de aplicar el campo, es decir, movimiento con velocidad de arrastre nula. El aumento de la temperatura en un conductor por el que circula corriente eléctrica fue observado experimentalmente por Joule y, por ello, se denomina *efecto Joule*. Nuestro objetivo ahora es evaluar la potencia que se comunica al conductor por este procedimiento.

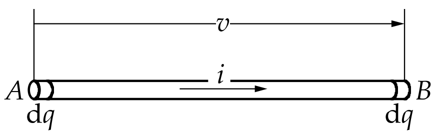

Fig. 13.- El efecto práctico de la corriente es que la carga dq se ha trasladado entre dos puntos de diferencia de potencial v en un tiempo dt.

Cuando en un hilo conductor como el representado en la figura 13 existe una diferencia de potencial[28] entre dos puntos, existe también un campo electrostático que produce corriente eléctrica estacionaria en el sentido del campo, de forma que la carga dq que en un tiempo dt atraviese la sección A de la izquierda, es la misma que la que atraviesa la sección B de la derecha. Es decir, el efecto del movimiento de las cargas, el efecto de la corriente, es el mismo que si una carga dq fuera trasladada por el campo electrostático entre los punto A y B. Por tanto, el trabajo que el campo realiza para efectuar ese traslado es la

[28] En adelante designaremos el potencial o diferencia de potencial instantáneo con letra minúscula. Seguimos así las recomendaciones de las normas, que aconsejan dejar las letras mayúsculas para representar valores no dependientes del tiempo. Hasta aquí habíamos preferido mantener la notación habitual en Electrostática, letra mayúscula para el potencial y letra minúscula para la velocidad y el volumen.

diferencia de potencial entre los extremos por la carga que se traslada: $v\mathrm{d}q$. La potencia, se obtiene dividiendo por el tiempo dt que tarda el campo en hacer el traslado de la carga:

$$p = v\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Pero i=dq/dt es la intensidad del conductor; por tanto la potencia buscada es

$$p=vi$$

Esa es la potencia que el campo eléctrico que mueve las cargas les entrega, y ellas, a su vez, entregan al conductor.

Se ha supuesto un hilo conductor para obtener la fórmula de la potencia, pero, si nos fijamos en su deducción, se observa que, cualquiera que sea el objeto de dos terminales entre los cuales hay una diferencia de potencial v y circula por él una intensidad i, recibe del campo que mueve las cargas una potencia $p=vi$. Para abreviar se le llama *potencia de la corriente eléctrica*. El objeto de dos terminales que recibe esa potencia se llama *receptor*. $p=vi$ es la potencia que absorbe el receptor o, simplemente, la *potencia del receptor*. Hay receptores que transforman esa potencia no solo en calor hacia el exterior como las resistencias, sino en otros tipos de energía.

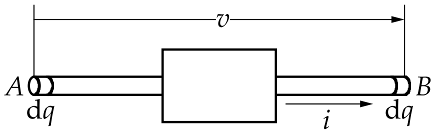

Fig. 14.- Cualquiera que sea el receptor, la potencia que absorbe vale p=vi.

Obsérvese que la potencia que absorbe un receptor es positiva, o sea, realmente absorbida, cuando tanto v como i sean positivas las dos o negativas las dos. Desde luego, cuando la única causa de la corriente en un objeto de dos terminales es un campo electrostático, la corriente siempre tiene el sentido de ese campo electrostático y, por tanto, de los potenciales decrecientes. Es decir, v e i tienen el mismo sentido. Pero veremos más adelante que hay objetos en los que, debido a otros campos superpuestos, la intensidad puede tener sentido contrario a la diferencia de potencial. Entonces la potencia que absorbe ese objeto es negativa, queriendo significar que entrega potencia, que empuja las cargas positivas en contra del campo electrostático, es decir, hacia los potenciales crecientes (o las negativas en el sentido del campo).

Si el receptor es una resistencia, siempre v e i tienen el mismo sentido, y la potencia que absorbe es siempre positiva: $p=vi$. Como, además, en una resistencia $v=Ri$, resulta $p=Ri^2$. O bien, como $i=v/R$, $p=v^2/R$. Por tanto, la potencia que absorbe una resistencia es siempre positiva de valor

$$p = vi = Ri^2 = \frac{v^2}{R}$$

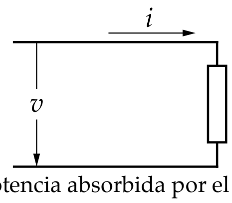

Fig. 15.- La potencia absorbida por el receptor es *p=vi.*

La figura 15 resume todo lo dicho: la potencia que entrega el campo o que absorbe el objeto de dos terminales es *p=vi*. Si v e i son las dos positivas o las dos negativas, p es positiva y el objeto realmente absorbe la potencia *p=vi*, por lo que es realmente un receptor. Si i tiene el signo opuesto de v, entonces la potencia es negativa; significa que el objeto entrega potencia o, lo que es equivalente, que empuja las cargas en sentido contrario al campo electrostático. El objeto se llama entonces *generador*.

Los vatímetros son aparatos que miden la potencia absorbida por los receptores. Indican el valor de esa potencia en cada instante. No obstante, si la potencia que absorbe el receptor no es constante, sino que cambia con el tiempo de forma periódica, y si ese cambio es demasiado rápido, el vatímetro indica el valor medio en un período de la potencia que el receptor absorbe. De aquí que el valor medio de la potencia sea de gran interés en Electrotecnia. El valor medio de la potencia que absorbe una resistencia en el intervalo de tiempo (t_1, t_2) es

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} Ri^2\,\mathrm{d}t = R\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i^2\,\mathrm{d}t = RI^2$$

Donde

$$I = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i^2\,\mathrm{d}t}$$

es el valor medio cuadrático de la intensidad en el intervalo en que se halla el valor medio de la potencia.

También

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{v^2}{R}\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v^2\,\mathrm{d}t = \frac{V^2}{R}$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v^2\,\mathrm{d}t}$$

es el valor medio cuadrático de la diferencia de potencial en el intervalo considerado.

Los *valores medios cuadráticos* se llaman en Electrotecnia *valores eficaces*. Por su aparición natural en la potencia media que absorbe una resistencia y en otras expresiones relacionadas con la potencia, tiene gran importancia, tanta que algunos amperímetros y voltímetros se fabrican para que midan los valores eficaces. En adelante designaremos los valores eficaces con letras mayúsculas sin subíndice.

Problemas

1.- Hallar la densidad de átomos n_a de un cuerpo en función de su peso atómico A y su densidad d. Hallarla para el cobre y el aluminio.

Solución:

Se llama densidad de átomos de un cuerpo al número de átomos que hay en cada unidad de volumen de ese cuerpo.

Un mol de átomos son 6.023×10^{23} átomos. $N_A = 6.023 \times 10^{23}$ se llama número de Avogadro. Si V es el volumen de un mol, el número de átomos por unidad de volumen es $n_a = \dfrac{N_A}{V}$. La masa en gramos de un mol de átomos es A, por lo que su volumen es $V = \dfrac{A}{d}$. Por tanto

$$n_a = \frac{N_A}{V} = \frac{N_A}{\frac{A}{d}} = \frac{N_A d}{A}$$

Si se sustituye en la fórmula d en g/cm^3 y A en gramos, se obtiene n_a en átomos por centímetro cúbico.

Para el cobre A=63.54 g y d=8.92 g/cm^3, por lo que

$$n_{a\text{Cu}} \cong \frac{6.023\times10^{23}\times8.92}{63.54} \cong 8.45\times10^{22}\ \frac{\text{átomos}}{\text{cm}^3}$$

Para el aluminio A=26.98 g y d=2.7 g/cm^3, por lo que

$$n_{a\text{Al}} \cong \frac{6.023\times10^{23}\times2.7}{26.98} \cong 6.03\times10^{22}\ \frac{\text{átomos}}{\text{cm}^3}$$

2.- Encontrar una fórmula para la concentración n de electrones libres en un metal en función de la densidad d del metal, de su peso atómico A y del número v de electrones libres por átomo (v es el número de electrones de valencia). Si se supone que cada átomo contribuye con un electrón libre, hallar la concentración de electrones libres en los dos conductores de uso habitual en Electrotecnia: en el cobre y en el aluminio. Hallar de nuevo la concentración de electrones libres y la densidad de carga libre en el cobre si cada átomo contribuye con dos electrones.

Solución:

La densidad de átomos, hallada en el problema anterior, es $n_a = \dfrac{N_A d}{A}$. Si cada átomo aporta v electrones libres, la densidad de electrones libres es

$$n = \frac{N_A d v}{A}$$

Si A está en gramos y d en gramos/cm^3, se obtiene n en electrones libres por centímetro cúbico.

Para el cobre A=63.54 g y d=8.92 g/cm^3. Para v=1,

$$n_{\text{Cu}} \cong \frac{6.023\times10^{23}\times1}{63.54}\times8.92 \cong 8.45\times10^{22}\ \frac{\text{electrones libres}}{\text{cm}^3}$$

Para el aluminio A=26.98 g y d=2.7 g/cm^3. Para v=1,

$$n_{\text{Al}} \cong \frac{6.023\times10^{23}\times1}{26.98}\times2.7 \cong 6.03\times10^{22}\ \frac{\text{electrones libres}}{\text{cm}^3}$$

Para v=2 en el cobre,

$$n'_{\text{Cu}} = \frac{6.023\times10^{23}\times2}{63.54}\times8.92 = 16.90\times10^{22}\ \frac{\text{electrones libres}}{\text{cm}^3}$$

Como se ve, para v=2 la concentración se duplica, pero permanece el orden de magnitud.

La concentración de carga libre es

$$\rho_l = qn'_{\text{Cu}} = 1.60\times10^{-19}\times16.90\times10^{22} = 27.04\times10^3\,\text{C}/\text{cm}^3 = 27.04\,\text{kC}/\text{cm}^3$$

Una cantidad enorme. Si la carga libre que hay en un centímetro cúbico de cobre cruzara una superficie en un segundo, la intensidad por esa superficie sería de 27 kA.

3.- Por un hilo conductor de 1 mm^2 de sección circula una intensidad de 15 A. ¿Cuántos electrones atraviesan una sección del conductor cada segundo?

Solución:

Cada segundo atraviesan una sección del conductor 15 C. Cada electrón tiene una carga de -1.602x10^{-19} C. Por tanto el número de electrones que atraviesan una sección en un segundo es

$$N = \frac{15}{-1.602\times 10^{-19}} = -9.363\times 10^{19}\,\frac{\text{electrones}}{\text{s}}$$

Una cantidad enorme, pero, solo algo más de la milésima parte de electrones libres que hay en un centímetro cúbico. Basta por eso que los electrones se muevan muy lentamente para que originen las intensidades habituales. El signo negativo significa que los electrones cruzan la superficie en sentido contrario a la intensidad.

4.- 15 A/mm^2 es una densidad de corriente alta en los conductores eléctricos metálicos de uso ordinario. Con objeto de tener una idea de la velocidad de arrastre de los electrones libres de los conductores de las instalaciones eléctricas habituales, hallar la velocidad de arrastre de los electrones de un conductor de cobre de 1 mm^2 de sección por el que circulara una intensidad constante de a) 15 A, b) 30 A, c) 100 A. Suponer un electrón libre por cada átomo. Hallar de nuevo la velocidad de arrastre para el caso a) suponiendo dos electrones libres por átomo.

Solución:

La densidad de corriente para portadores con carga q y densidad de portadores n es $j_n = qnv_n$. De aquí, para el caso a),

$$v_n = \frac{j_n}{qn} = \frac{\frac{i}{s}}{qn} = \frac{i}{qsn} \cong \frac{15}{-1.602\times 10^{-19}\times 0.01\times 8.45\times 10^{22}} \cong -0.11\,\text{cm / s}$$

El signo negativo significa que la velocidad es de sentido contrario a la densidad de corriente. Proviene de que q es un número para el electrón.

Para el caso b)

$$v_n = \frac{j_n}{qn} = \frac{\frac{i}{s}}{qn} = \frac{i}{qsn} = \frac{30}{-1.602\times 10^{-19}\times 0.01\times 8.45\times 10^{22}} \cong -0.22\,\text{cm / s}$$

Para el caso c)

$$v_n = \frac{j_n}{qn} = \frac{\frac{i}{s}}{qn} = \frac{i}{qsn} \cong \frac{100}{-1.602\times 10^{-19}\times 0.01\times 8.45\times 10^{22}} \cong -0.74\,\text{cm / s}$$

Como se ve, incluso para densidades de corriente altas, la velocidad de arrastre es muy pequeña[29], menor de 1 cm/s.

En el caso de que el número de electrones libres por átomo fuera dos en lugar de uno, la velocidad de arrastre sería la mitad:

$$v_n = \frac{j_n}{qn} = \frac{\frac{i}{s}}{qn} = \frac{i}{qsn} = \frac{15}{-1.602\times 10^{-19}\times 0.01\times 16.90\times 10^{22}} \cong -0.05\,\mathrm{cm/s}$$

5.- Hallar la velocidad y el espacio que recorren los electrones libres de un conductor de cobre por el que circula una corriente sinusoidal de frecuencia f=50 Hz y de densidad de corriente eficaz J=10 A/mm^2.

Solución:

La densidad de corriente instantánea es $j = J_m \mathrm{sen}\omega t$, a la que corresponde la velocidad de arrastre $v = \frac{j}{qn} = \frac{J_m}{qn}\mathrm{sen}\omega t = V_m \mathrm{sen}\omega t$, que es una velocidad alterna de la misma frecuencia que la intensidad. $V_m = \frac{J_m}{qn} = \frac{J\sqrt{2}}{qn}$ es el valor máximo de la velocidad de arrastre.

El espacio que recorren los electrones es

$$x = \int v\,\mathrm{d}t = -\frac{V_m}{\omega}\cos\omega t = -\frac{J\sqrt{2}}{qn\omega}\cos\omega t = -\frac{J\sqrt{2}}{2\pi fqn}\cos\omega t = -X_m\cos\omega t$$

Se ha tenido en cuenta que $\omega = 2\pi f$.

O sea, si la intensidad es sinusoidal, los electrones solo vibran. El máximo desplazamiento respecto al punto central de la vibración es

$$X_m = \frac{J\sqrt{2}}{2\pi fqn}$$

Para el hilo de cobre dado

$$v = \frac{J\sqrt{2}}{qn}\mathrm{sen}\omega t \cong \frac{10\sqrt{2}}{-1.602\times 10^{-19}\times 8.45\times 10^{22}}\mathrm{sen}\omega t \cong -10^{-3}\,\mathrm{sen}\omega t$$

$$x = -\frac{J\sqrt{2}}{2\pi fqn}\cos\omega t \cong -\frac{10\sqrt{2}}{2\pi\times 50\left(-1.602\times 10^{-19}\right)\times 8.45\times 10^{22}}\cos\omega t \cong$$

$$\cong 3.3\times 10^{-6}\cos\omega t$$

Es decir, la velocidad máxima es $10^{-3}\,\mathrm{m/s} = 1\,\mathrm{mm/s}$; y el desplazamiento máximo respecto al punto central de oscilación de cada electrón es $3.3\times 10^{-6}\,\mathrm{m} = 3.3\,\mu\mathrm{m}$.

---

29 La razón de que la velocidad de arrastre sea tan pequeña es que hay muchos electrones libres por cada centímetro cúbico, es decir, mucha carga libre, como se vio en el problema anterior. Por eso, aunque los electrones se muevan lentamente, pasan muchos cada segundo.

Estos resultados deben contribuir a eliminar algunas interpretaciones incorrectas consistentes en creer que los electrones en los conductores se mueven con velocidades de arrastre muy elevadas, incluso próximas a la de la luz.

Una corriente sinusoidal en un hilo conductor consiste, por tanto, en la vibración sincrónica, o sea, en fase, de todos electrones libres del conductor. La velocidad máxima de esta vibración es reducida, en este caso de 1 mm/s, y el desplazamiento máximo también muy reducido, en el ejemplo de unas 3 micras. La frecuencia de este movimiento vibratorio armónico es la de la intensidad; en este caso 50 Hz.

6.- Hallar la movilidad de los electrones libres del cobre suponiendo una concentración n=8.45× 10^{22} electrones/cm^3 y una resistividad ρ=1.72 μΩcm. Hallar la constante C, la constante de tiempo de la velocidad y el tiempo que tarda en establecerse la velocidad permanente de los electrones en un conductor de cobre desde que se aplica un campo eléctrico constante. La masa del electrón es m=9.1×10^{-31} kg.

Solución:

n=8.45× 10^{22} electrones/cm^3 =8.45× 10^{28} electrones/m^3

$\rho = 1.72\,\mu\Omega.\text{cm} = 1.72\times10^{-8}\,\Omega\text{m}$

De $\sigma = qn\mu$ se obtiene

$$\mu = \frac{\sigma}{qn} = \frac{1}{\rho qn}$$

$$\mu_{Cu} = \frac{1}{1.72\times10^{-8}\left(-1.60\times10^{-19}\right)8.45\times10^{28}} = -4.30\times10^{-3}\ \frac{\text{m}^2}{\text{V}s}$$

De $\mu = \dfrac{q}{C}$ resulta

$$C = \frac{q}{\mu} = \frac{q}{\dfrac{1}{\rho qn}} = \rho q^2 n$$

$$C_{Cu} = \rho q^2 n \cong 1.72\times10^{-8}\times\left(-1.602\times10^{-19}\right)^2\times8.45\times10^{28} \cong$$

$$\cong 3.7\times10^{-17}\,\text{Ns/m}$$

La constante de tiempo es

$$\tau = \frac{m}{C} = \frac{m}{\rho q^2 n}$$

$$\tau_{Cu} \cong \frac{9.1\times10^{-31}}{1.72\times10^{-8}\left(-1.602\times10^{-19}\right)^2\times8.45\times10^{28}} \cong$$

$$\cong 2.4\times10^{-14}\text{s} = 24\,\text{fs}$$

Se considera que la velocidad ha alcanzado el valor permanente cuando ha transcurrido un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo:

$$5\tau_{Cu} \cong \frac{5\times9.1\times10^{-31}}{1.72\times10^{-8}\left(-1.602\times10^{-19}\right)^2\times8.45\times10^{28}} \cong$$

$$\cong 1.2\times10^{-13}\text{s} = 120\,\text{fs}$$

Tiempo que justifica la hipótesis de que la velocidad de los electrones es proporcional al campo eléctrico si este no varía con mucha rapidez.

7.- La densidad de corriente de un conductor de cobre es j=100 A/mm^2. Hallar la velocidad de arrastre de los electrones libres de ese conductor a partir de t=0 en que se anula el campo eléctrico en todos sus puntos.

Solución:

Si el campo eléctrico es cero, la única fuerza sobre los electrones es la de rozamiento, por lo que la ecuación del movimiento es

$$-Cv = ma\,; \qquad -Cv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,; \qquad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{C}{m}\mathrm{d}t$$

$$\ln v - \ln K = -\frac{C}{m}t\,; \qquad \ln\frac{v}{K} = -\frac{C}{m}t$$

$$\frac{v}{K} = \mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t}\,; \qquad v = K\mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t}$$

K se puede hallar si se conoce la velocidad en t=0, que llamaremos $v(0)$. Entonces $v(0) = K$ y

$$v = v(0)\mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t}$$

De $j = qnv$ se obtiene que $v = \dfrac{j}{qn}$, y

$$v(0) = \frac{100\times 10^{6}}{1.602\times 10^{-19}\times 8.45\times 10^{28}} \cong 7.4\times 10^{-3}\,\mathrm{m/s} = 7.4\,\mathrm{mm/s}$$

$$v \cong 7.4\mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t} \cong 7.4\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2.4\times 10^{-14}}t}$$

La velocidad se hace cero y, por tanto, también la densidad de corriente, al cabo de unas cinco veces la constante de tiempo, es decir, al cabo de $5\tau \cong 5\times 2.4\times 10^{-14} \cong 1.2\times 10^{-13}\mathrm{s} = 120\ \mathrm{fs}$.

8.- La concentración de los principales iones del agua del mar[30] y sus movilidades son, a 0°C, las siguientes:

Ion	Concentración en m^{-3}.	Movilidad en m^2/Vs.
Na^+	276 x 10^{24}	2.7 x 10^{-8}
K^+	5.8 x 10^{24}	4.2 x 10^{-8}
Mg^{2+}	31.5 x 10^{24}	5.2 x 10^{-8}
Cl^-	332 x 10^{24}	4.3 x 10^{-8}
SO_4^{2-}	6.1 x 10^{24}	8.6 x 10^{-8}

Averiguar la conductividad total y el ion que más contribuye a ella. Hallar la densidad de corriente en el agua del mar por cada unidad de campo eléctrico y compárese con la que se origina en el cobre, de resistividad 1.72 $\mu\Omega$ cm.

---

[30] Los datos se han obtenido de A. M. PORTIS, Campos Electromagnéticos, Barcelona 1985, que cita las Tablas Físicas del Instituto Smithsonian, 1956.

Solución:
Hallaremos la conductividad a que da lugar cada ion:

$$\sigma_{Na^+} \cong 1.602\times10^{-19}\times276\times10^{24}\times2.7\times10^{-8}\cong 1.194\,\mathrm{S/m}$$
$$\sigma_{K^+} \cong 1.602\times10^{-19}\times5.8\times10^{24}\times4.2\times10^{-8}\cong 0.039\,\mathrm{S/m}$$
$$\sigma_{Mg^{2+}} \cong 2\times1.602\times10^{-19}\times31.5\times10^{24}\times5.2\times10^{-8}\cong 0.525\,\mathrm{S/m}$$
$$\sigma_{Cl^-} \cong 1.602\times10^{-19}\times332\times10^{24}\times4.3\times10^{-8}\cong 2.287\,\mathrm{S/m}$$
$$\sigma_{SO_4^{2-}} \cong 2\times1.602\times10^{-19}\times6.1\times10^{24}\times8.6\times10^{-8}\cong 0.168\,\mathrm{S/m}$$

Como se ve, la mayor contribución es la del ion cloro, con 2.287 S/m.

La conductividad total es la suma de las conductividades:

$$\sigma_a \cong 1.194+0.039+0.525+2.287+0.168 = 4.213\,\mathrm{S/m}$$

La densidad de corriente por unidad de campo eléctrico es

$$j_a = \sigma_a E \cong 4.213\times1 = 4.213\,\mathrm{A/m^2} = 4.213\,\mu\mathrm{A/mm^2}$$

En el cobre

$$j_{\mathrm{Cu}} = \sigma_{\mathrm{Cu}}E = \frac{1}{1.72\times10^{-8}}\times1 = 58.140\times10^6\,\mathrm{A/m^2} = 58.140\,\mathrm{A/mm^2}$$

$$\frac{j_{Cu}}{j_a} = \frac{58.140\times10^6}{4.213} = 13.8\times10^6$$

El cobre es mucho mejor conductor que el agua del mar.

9.- Hallar, a 20°C, la relación entre los campos eléctricos que crean la misma densidad de corriente en el cobre que en el hierro. Utilizar los datos de la tabla 1.

Solución:

Para crear la densidad de corriente j en el cobre se necesita un campo eléctrico tal que $j=\sigma_{\mathrm{Cu}}E_{\mathrm{Cu}}$; es decir, $E_{\mathrm{Cu}}=j/\sigma_{\mathrm{Cu}}=j\rho_{\mathrm{Cu}}=1.72\text{x}10^{-8}j$. Para crear la misma densidad de corriente en el hierro se necesita un campo $E_{\mathrm{Fe}}=j\rho_{\mathrm{Fe}}=9.7\text{x}10^{-8}j$. La relación es

$$\frac{E_{\mathrm{Fe}}}{E_{\mathrm{Cu}}} = \frac{9.7\times10^{-8}j}{1.72\times10^{-8}j}\cong 5.64$$

Los campos que crean la misma densidad de corriente en distintos conductores son directamente proporcionales a las resistividades.

10.- Hallar, a 20°C, la resistencia por metro y por kilómetro de longitud de un conductor filiforme de cobre, de aluminio, de hierro y de wolframio de 1 mm^2 de sección. Hallar el campo eléctrico que hace circular en cada uno de los hilos 10 A.

Solución:

$$R_{\mathrm{mCu}} = \rho_{\mathrm{Cu}}\frac{l}{s}\cong 1.72\times10^{-8}\frac{1}{1\times10^{-6}} = 1.72\times10^{-2}\,\Omega$$
$$R_{\mathrm{m}Al} = \rho_{\mathrm{Al}}\frac{l}{s}\cong 2.7\times10^{-8}\frac{1}{1\times10^{-6}} = 2.7\times10^{-2}\,\Omega$$
$$R_{\mathrm{mFe}} = \rho_{\mathrm{Fe}}\frac{l}{s}\cong 9.7\times10^{-8}\frac{1}{1\times10^{-6}} = 9.7\times10^{-2}\,\Omega$$

$$R_{\mathrm{mW}} = \rho_{\mathrm{W}} \frac{l}{s} \cong 5.5 \times 10^{-8} \frac{1}{1 \times 10^{-6}} = 5.5 \times 10^{-2}\,\Omega$$

$$R_{\mathrm{kmCu}} \cong 1.72 \times 10^{-2} \times 10^{3} = 17.2\,\Omega$$

$$R_{\mathrm{kmA}l} \cong 2.7 \times 10^{-2} \times 10^{3} = 27\,\Omega$$

$$R_{\mathrm{kmFe}} = 9.7 \times 10^{-2} \times 10^{3} = 97\,\Omega$$

$$R_{\mathrm{kmW}} \cong 5.5 \times 10^{-2} \times 10^{3} = 55\,\Omega$$

$$V_{\mathrm{mCu}} = R_{\mathrm{mCu}} i \cong 1.72 \times 10^{-2} \times 10 = 0.172 \text{ V / m} = E_{\mathrm{Cu}}$$

$$V_{\mathrm{mAl}} = R_{\mathrm{mAl}} i \cong 2.7 \times 10^{-2} \times 10 = 0.27 \text{ V / m} = E_{\mathrm{Al}}$$

$$V_{\mathrm{mFe}} = R_{\mathrm{mFe}} i \cong 9.7 \times 10^{-2} \times 10 = 0.97 \text{ V / m} = E_{\mathrm{Fe}}$$

$$V_{\mathrm{mW}} = R_{\mathrm{mW}} i \cong 5.5 \times 10^{-2} \times 10 = 0.55 \text{ V / m} = E_{\mathrm{W}}$$

11.- A 293 K el coeficiente de temperatura del cobre es $\alpha = 0.004$ y su resistividad $\rho(293) = 1.72\,\mu\Omega\mathrm{cm}$. Hallar su resistividad a 80°C con las diferentes fórmulas usuales y comparar los resultados.

Solución:

a) Se supone la resistividad proporcional a la temperatura absoluta: $\rho = kT$. Esto equivale a no considerar el valor experimental de α, sino a aceptar el valor teórico $\alpha = 1/T$. Entonces, a 293 K se tiene: $\rho(293) = k \times 293$, de donde $k = \rho(293)/293$, con lo que

$$\rho(273+80) = k \times 353 = \frac{\rho(293)}{293} 353 = \frac{1.72 \times 10^{-8} \times 353}{293} \cong 2.72 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$$

b) Con $\rho = K \mathrm{e}^{\alpha T}$, se considera α independiente de la temperatura. Con $\alpha = 0.004$ se tiene: $\rho(293) = K \mathrm{e}^{\alpha \times 293}$; $K = \rho(293) / \mathrm{e}^{\alpha \times 293}$

$$\rho(353) = \frac{\rho(293)}{\mathrm{e}^{\alpha \times 293}} \mathrm{e}^{\alpha \times 353} = \frac{1.72 \times 10^{-8}}{\mathrm{e}^{0.004 \times 293}} \mathrm{e}^{0.004 \times 353} \cong 2.19 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$$

c) $\rho = \rho_1 (1 + \alpha \Delta t)$ es una aproximación del caso anterior:

$$\rho(353) = \rho(293)\big(1 + 0.004(353 - 293)\big) \cong 2.13 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$$

Como se ve, los resultados difieren, por lo que, en aplicaciones de ingeniería, las fórmulas deben ser consideradas solo como orientativas.

12.- En la figura 1 se representa la intensidad de un conductor filiforme de 5 Ω de resistencia. Hallar su valor medio en un periodo y la carga que ha atravesado una sección del hilo en 2 horas.

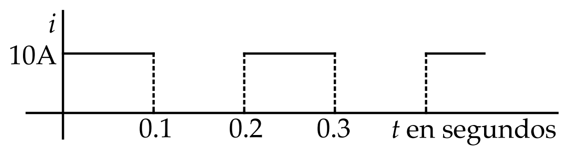

Fig. 1.- Intensidad periódica.

Solución:

En el primer periodo la función está definida así:

$$i = \begin{vmatrix} 10 & \text{si} & 0 \le t \le 0.1 \\ 0 & \text{si} & 0.1 < t \le 0.2 \end{vmatrix}$$

El valor medio en un periodo y en un número entero de periodos es

$$\bar{I} = \frac{1}{0.2-0}\left(\int_0^{0.1} 10\,\mathrm{d}t + \int_{0.1}^{0.2} 0\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{0.2}[10t]_0^{0.1} = \frac{1}{0.2} = 5\,\mathrm{A}$$

2 h=7200 s es un número entero de periodos, ya que 7200/0.2=36000. Por tanto,

$$q(2\mathrm{h}) = \bar{I}(t_2 - t_1) = 5 \times 7200 = 36000\,\mathrm{C} = 36\,\mathrm{kC}$$

13.- Hallar el valor eficaz de la intensidad del problema anterior en un periodo y el valor medio de la potencia que absorbe la resistencia en un periodo. ¿Cuánta energía absorbe la resistencia en 2 h?

Solución:

$$I = \sqrt{\frac{1}{0.2-0}\int_0^{0.2} i^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{0.2}\left(\int_0^{0.1} 10^2\,\mathrm{d}t + \int_{0.1}^{0.2} 0^2\,\mathrm{d}t\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{0.2}\left(\int_0^{0.1} 10^2\,\mathrm{d}t\right)} = \sqrt{\frac{1}{0.2}[100t]_0^{0.1}} = \sqrt{\frac{10}{0.2}} = 5\sqrt{2} \cong 7.07\,\mathrm{A}$$

$$P = RI^2 = 5 \times \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 250\,\mathrm{W}$$

Como 2 h = 7200 s es un número entero de periodos,

$$W = P(t_2 - t_1) = 250 \times 7200 = 1800000\,\mathrm{J} = 1.8\,\mathrm{MJ}$$

14.- La figura 2 es la gráfica de la intensidad por una resistencia de 50 Ω. Hallar sus valores medio y eficaz, el valor medio de la potencia que absorbe la resistencia en un periodo, la carga que ha circulado y la energía que ha absorbido la resistencia al cabo de media hora. Dibujar la gráfica de la tensión en la resistencia.

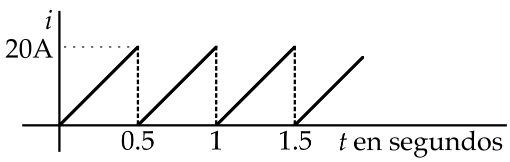

Fig. 2.- Gráfica de la intensidad.

Solución:

La intensidad en el primer periodo está definida así:

$$i = \frac{20}{0.5}t = 40t \quad \text{si} \quad 0 \le t \le 0.5$$

$$\bar{I} = \frac{1}{0.5-0}\int_0^{0.5} 40t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{0.5}\left[20t^2\right]_0^{0.5} = 2 \times 5 = 10\,\mathrm{A}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{0.5-0}\int_0^{0.5} (40t)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{2\left[\frac{1600}{3}t^3\right]_0^{0.5}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \cong 11.55\,\mathrm{A}$$

$$P = RI^2 = 50 \times \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2 \times 10^4}{3} \cong 6666.67\,\mathrm{W} \cong 6.7\,\mathrm{kW}$$

0.5 h=1800 s es un número entero de periodos; por tanto,

$$q(0.5) = 10 \times 1800 = 18000\,\mathrm{C} = 18\,\mathrm{kC}$$

$$W(0.5\mathrm{h}) = Pt = \frac{2 \times 10^4}{3} \times 1800 = 12 \times 10^6\,\mathrm{J} = 12\,\mathrm{MJ}$$

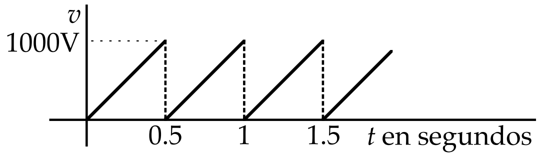

Fig. 3.- Tensión de la resistencia.

La tensión de la resistencia es $v=Ri=50i$. En el primer periodo, $v=50\times 40t=2000t$ si $0<t<0.5$ s. Es, como la intensidad, una recta de valor extremo en $t=0.5$ s $v(0.5)=1000$ V. Se representa en la figura 3. La gráfica de la tensión de una resistencia tiene la misma forma que la gráfica de la intensidad, pues se obtiene de ella multiplicando por un número real positivo.

15.- Demostrar que el valor eficaz de la tensión de una resistencia cuya intensidad tiene un valor eficaz I es $V=RI$, y que el valor medio es $\overline{V} = R\overline{I}$ ($\overline{I}$ es el valor medio de la intensidad).

Solución:

El valor instantáneo de la tensión en una resistencia es $v=Ri$. El eficaz es

$$V = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} R^2 i^2\,\mathrm{d}t} = R\sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i^2\,\mathrm{d}t} = RI$$

El valor eficaz de la intensidad es

$$I = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i^2\,\mathrm{d}t}$$

$$\overline{V} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} Ri\,\mathrm{d}t = R\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i\,\mathrm{d}t = R\overline{I}$$

$$\overline{I} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i\,\mathrm{d}t$$

es el valor medio de la intensidad.