Ángulo plano y ángulo sólido

Félix Redondo Quintela, Roberto C. Redondo Melchor.
Universidad de Salamanca
19 de abril de 2009; modificado 26 de febrero de 2017.

El concepto de ángulo plano es bien conocido. El de ángulo sólido lo es menos; pero es útil para hallar el flujo de algunos campos vectoriales, como el electrostático y el gravitatorio. En este artículo estudiamos los dos ángulos. Comenzamos por el ángulo plano porque su conocimiento facilitará el del ángulo sólido.

Ángulo plano

Definición.- *Ángulo plano es cada una de las dos partes en que dos semirrectas con el mismo origen dividen al plano que determinan.*

Las semirrectas se llaman *lados* de los dos ángulos.

El punto común de las dos semirrectas se llama *vértice* de los dos ángulos (Fig. 1).

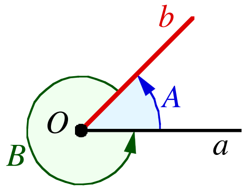

Fig. 1.- Las semirrectas a y b determinan los ángulos A y B. a y b son los lados del ángulo A y los del B. El punto O es el vértice del ángulo A y el del ángulo B.

Si con centro en el vértice de cualquier ángulo plano tal como el ángulo A, se traza con un compás un arco limitado por los lados de ese ángulo, y se halla el cociente entre las longitudes s_1 del arco y r_1 del radio con que ha sido trazado, se obtiene un número real α (Fig. 2). Si se traza otro arco con otro radio, se puede demostrar que el cociente entre su longitud s_2 y la del radio r_2 con que ha sido trazado resulta también α. Y así sucesivamente para el ángulo A. En la figura 2

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \cdots = \frac{s_n}{r_n} = \alpha \tag{1}$$

α se llama *medida* del ángulo de que se trate.

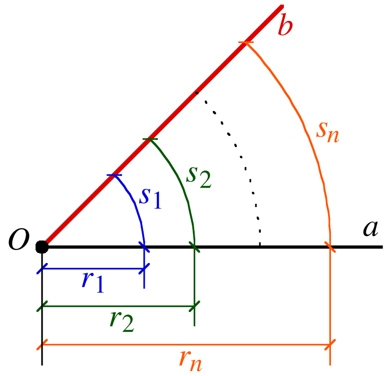

Fig. 2.- Cada ángulo plano tiene la propiedad de que $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \cdots = \frac{s_n}{r_n} = \alpha$.
Por eso cada ángulo plano se identifica por su número real α, que se llama medida del ángulo plano.

Dados dos ángulos, α puede resultar el mismo número real en los dos. Si es así se dice que los dos ángulos son iguales o que miden lo mismo. Si la medida de un ángulo es distinta de la de otro, se dice de esos dos ángulos que no son iguales.

Nótese que la dimensión de α es la unidad, el número 1, pues es el cociente entre dos longitudes. Se dice por eso que α no tiene unidades, o que α es adimensional.

Pero un ángulo plano en el que $\alpha = 1$ se viene tradicionalmente llamando *radián*. Por eso, de un ángulo en el que $\alpha = 1$ se dice a veces que es un ángulo de un radián o que mide un radián, en vez de decir solo que mide 1. Si $\alpha = 1.3$ se dice también a veces que mide 1.3 radianes en vez de decir solo que mide 1.3. Y así para el resto de ángulos planos.

Esta práctica es admitida por el Sistema Internacional de Unidades, aunque sea artificial, pues las unidades derivadas del Sistema Internacional son conjuntos de otras unidades relacionadas por operaciones. En el caso del radián la operación es m/m, metro/metro, metro por metro, cuyo resultado es el número 1, sin unidades. Y así, sin unidades, debería expresarse ese resultado. Por eso el Sistema Internacional dice del radián lo siguiente: “The radian and steradian are special names for the number one that may be used to convey information about the quantity concerned. In practice the symbols rad and sr are used where appropriate, but the symbol for the derived unit one is generally omitted in specifying the values of dimensionless quantities[1].” El *radián* es, pues, un nombre que se da al número 1 cuando convenga.

El símbolo del radián es rad en el Sistema Internacional de Unidades.

[1] El radián y el estereoradián son nombres especiales del número uno que pueden usarse para transmitir información sobre la cantidad a que se refieren. En la práctica los símbolos rad y sr se usan donde es apropiado, pero el símbolo para la unidad derivada uno se suele omitir al expresar valores de cantidades adimensionales.

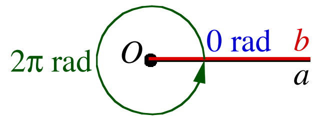

Fig. 3.- Si dos semirrectas coinciden, forman un ángulo de 0 rad y otro de 2π rad.

Si las dos semirrectas *a* y *b* coinciden (Fig. 3), la longitud del arco de uno de los dos ángulos que las dos semirrectas determinan es cero, cualquiera que sea el radio de ese arco, por lo que la medida de ese ángulo es $s/r = \alpha = 0$. El arco del otro ángulo es una circunferencia de longitud $s = 2\pi r$, por lo que ese ángulo mide

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Un ángulo plano que mide 2π se llama *ángulo completo*.

Ángulo plano orientado

La anterior definición de ángulo plano puede completarse para crear el concepto de *ángulo plano orientado*, útil a veces.

Si para medir el arco se va desde una semirrecta a la otra en sentido contrario al de las agujas del reloj, la medida s del arco se considera positiva y, como el radio r se considera siempre positivo, el ángulo $\alpha = s/r$ resulta positivo. Si para medir el arco se va desde una semirrecta a la otra en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, la longitud del arco se considera negativa, y el ángulo $\alpha = s/r$ resulta negativo.

Esto suele expresarse diciendo que los ángulos que se describen en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj son positivos, y los que se describen en el mismo sentido de las agujas del reloj son negativos. En las representaciones gráficas esos dos sentidos posibles de los ángulos se indican a veces con flechas, como se hace en las figuras 1 y 3.

Naturalmente que la asignación de signos a los ángulos puede hacerse o no, según convenga.

Ángulo sólido

Sea un curva cerrada c del espacio (Fig. 4), un punto O y la superficie formada por todas las semirrectas con origen en O y un punto en la curva c. Esa superficie se llamará *superficie cónica* de vértice O determinada por la curva cerrada c.

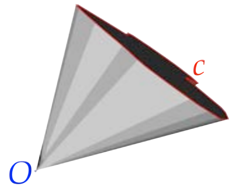

Fig. 4.- Superficie cónica de vértice *O* determinada por la curva *c*.

Definición.- *Ángulo sólido es cada una de las dos partes en que una superficie cónica divide al espacio.*

El vértice *O* de la superficie cónica se llama *vértice* de los dos ángulos sólidos.

Si (Fig. 5), con centro en el vértice de un ángulo sólido se traza una superficie esférica, y se considera el casquete esférico limitado por la curva en que la superficie cónica corta a la superficie esférica, y se halla el cociente entre la superficie s_1 de ese casquete y el cuadrado r_1^2 del radio de la superficie esférica, se obtiene un número real α. Si se traza otra superficie esférica con otro radio r_2, puede demostrarse que el cociente entre la superficie del nuevo casquete s_2 y el cuadrado del radio r_2^2 con que ha sido trazado es también α. Y así sucesivamente para el mismo ángulo sólido.

Es decir, (Fig. 5), para cada ángulo sólido se cumple que

$$\frac{s_1}{r_1^2} = \frac{s_2}{r_2^2} = \cdots = \frac{s_n}{r_n^2} = \alpha \tag{2}$$

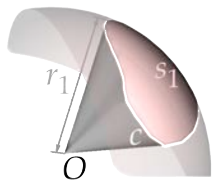

Fig. 5.- Cada ángulo sólido tiene la propiedad de que $\frac{s_1}{r_1^2} = \frac{s_2}{r_2^2} = \cdots = \frac{s_n}{r_n^2} = \alpha$. α se llama medida de ese ángulo.

También el número real α de (2) es adimensional. Pero el ángulo sólido de medida 1 se viene llamando *estereorradián*, por lo que el Sistema Internacional de Unidades dice de él lo que expresa el entrecomillado de más arriba, que estereorradián es otro nombre del número 1 cuando sea conveniente. Su símbolo es sr. Así si $\alpha = 1$ se dice a veces que el ángulo sólido mide 1 sr, si $\alpha = 0.3$, se dice que el ángulo sólido mide 0.3 sr, etc. Pero también se puede decir que esos ángulos sólidos miden 1 y 0.3 respectivamente.

Ángulo sólido bajo el que se ve una superficie *S* desde un punto

Definición.- *Se llama ángulo sólido bajo el que se ve una superficie S desde un punto O al ángulo sólido determinado por la superficie cónica de las semirrectas con origen en O que pasan por los puntos de la curva cerrada que limita a la superficie S* (Fig. 6).

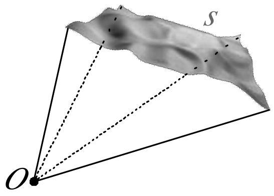

Fig. 6.- Ángulo sólido bajo el que se ve la superficie *s* desde el punto *O*.

Si se trata de una superficie plana dS, representada por el vector perpendicular a ella $\overrightarrow{dS}$ (Fig. 7), el ángulo sólido dΩ bajo el cual se ve esa superficie desde un punto O es aproximadamente el mismo que el ángulo sólido bajo el que se ve la superficie representada por dS_n, que es la componente de $\overrightarrow{dS}$ en la dirección de $\vec{R}$. La aproxiación es mayor cuanto menor sea $\overrightarrow{dS}$. El vector $\vec{R}$ tiene como origen el punto O y como extremo un punto de $\overrightarrow{dS}$. La proyección de $\overrightarrow{dS}$ sobre la dirección de $\vec{R}$ es

$$dS_n = dS\cos\theta = \vec{u}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{\vec{R}\cdot\overrightarrow{dS}}{R} \qquad (3)$$

Para obtener (3) se ha tenido en cuenta que la proyección de un vector tal como $\overrightarrow{dS}$ sobre una dirección es el producto escalar del vector unitario $\vec{R}/R$ en esa dirección por el vector que se proyecta, en este caso $\overrightarrow{dS}$.

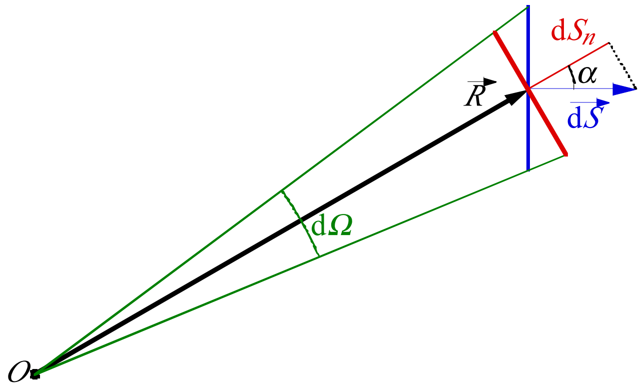

Fig. 7.- Ángulo sólido dΩ bajo el que se ve una superficie plana dS .

Como dS_n es perpendicular a $\vec{R}$, es próxima a la superficie del casquete esférico de radio R limitado por el ángulo sólido dΩ. Es decir,

$$d\Omega \simeq \frac{dS_n}{R^2} = \frac{\vec{R}\cdot\overrightarrow{dS}}{R^3} \qquad (4)$$

Se puede utilizar (4) para hallar una expresión para el ángulo sólido bajo el que se ve una superficie S cualquiera desde el punto O. Para ello se aproxima la superficie S por pequeñas superficies planas $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Cada superficie $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ se ve desde O aproximadamente bajo el ángulo sólido dado por (4). Por tanto, el ángulo sólido bajo el cual se ve toda la superficie S desde O es la integral de (4), es decir,

$$\Omega = \int_S \frac{\vec{R}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}}{R^3} \tag{5}$$

De hecho la fórmula (5) se puede tomar como definición formal de ángulo sólido bajo el que se ve la superficie S desde el punto O. $\vec{R}$ en (5) es cada vector con origen en O y extremo en un punto de cada $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

Las definiciones formales equivalentes (4) y (5) de ángulo sólido indican que hay ángulos sólidos negativos. En concreto, si se halla el ángulo sólido bajo el cual se ve la superficie $-\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, opuesta de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, desde el punto O (Fig. 7), el resultado es $-\mathrm{d}\Omega$, el opuesto de $\mathrm{d}\Omega$ de (4). Y toda la superficie -*S* se ve desde O bajo el ángulo sólido

$$\Omega' = \int_S \frac{\vec{R}\cdot\left(\overrightarrow{\text{-d}S}\right)}{R^3} = -\int_S \frac{\vec{R}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}}{R^3} = -\Omega \tag{6}$$

el ángulo sólido opuesto de Ω de (5).

Es decir, al hallar el ángulo sólido bajo el cual se ve una superficie desde un punto, se pueden considerar dos sentidos, uno hacia cada parte de la superficie. El resultado de (5) es positivo o negativo según el sentido de la superficie que se considere.

El ángulo sólido bajo el que se ve cualquier superficie cerrada desde un punto del volumen interior a ella se obtiene dividiendo el área de cualquier superficie esférica con centro en el punto entre el radio de esa superficie:

$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

Ángulo sólido bajo el que se ve una superficie cerrada desde un punto exterior al volumen encerrado por la superficie

Se llama ángulo sólido bajo el que se ve el volumen interior a la superficie cerrada S desde un punto O exterior a ese volumen (Fig. 8) al ángulo sólido positivo determinado por la superficie cónica a la que pertenecen las semirrectas de origen O tangentes a S.

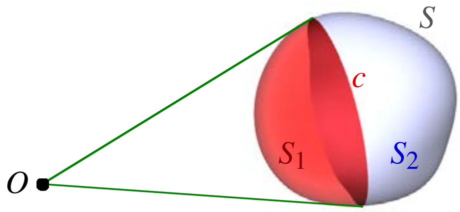

Fig. 8.- El ángulo sólido bajo el que se ve la superficie cerrada S desde un punto exterior al volumen que encierra es cero.

Nótese que la superficie cónica tangente a S determina sobre S la curva c formada por los puntos de tangencia. Esa curva es borde de dos superficies, S_1 y S_2, que, juntas, forman la superficie cerrada S. El ángulo sólido bajo el que se ve cada una de esas superficies desde O se halla con (5), que da el mismo valor absoluto para los ángulos de las dos superficies, pues ambas están limitadas por la misma curva. En una superficie cerrada suele tomarse como sentido positivo el saliente de la superficie; por eso el ángulo sólido de la superficie S_1 resulta opuesto del ángulo sólido de la superficie S_2. La suma de esos dos ángulos, que es cero, se llama ángulo sólido bajo el que se ve la superficie cerrada S desde el punto O, exterior al volumen encerrado por la superficie. Resulta, por tanto, que el *ángulo sólido bajo el que se ve una superficie cerrada S desde un punto exterior al volumen encerrado por esa superficie es cero*.

Al hallar el flujo del campo eléctrico creado por una carga eléctrica puntual a través de la superficie S aparece la fórmula (5). Lo mismo al hallar el flujo del campo gravitatorio creado por una masa puntual y, en general, al hallar flujos de campos creados por objetos puntuales cuyos módulos sean inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre el objeto y el punto en el que se halla el campo. Con la definición de ángulo sólido dada porc (5) es muy fácil hallar esos flujos, que resultan proporcionales al ángulo sólido bajo el que se ve la superficie S desde el punto que ocupa la causa del campo.

En la demostración de la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb se utiliza el concepto de ángulo sólido (ver Félix Redondo Quintela y Roberto Carlos Redondo Melchor, *Campo electrostático*).

