Conceptos de derivada y de diferencial

Roberto C. Redondo Melchor, Norberto Redondo Melchor, Félix Redondo Quintela[1]
Universidad de Salamanca
18 de agosto de 2012
v1.3: *17 de septiembre de 2012*

Aunque los conceptos matemáticos de derivada y de diferencial son bien conocidos, los presentamos en este comentario principalmente desde la perspectiva de sus aplicaciones.

1. Derivada

La derivada de y respecto a x es lo que varía y por cada unidad que varía x. Ese valor se designa por $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

Las funciones reales de variable real *lineales* son las funciones reales de variable real dadas por la fórmula

$$y = ax \tag{1}$$

donde *a* es un número real[2]. Un intento de hallar en (1) lo que se incrementa *y* por cada unidad que se incremente *x* puede consistir en incrementar *x* una cantidad $\Delta x = h \neq 0$ desde un valor x_0. Entonces, según (1), *y* pasa de valer ax_0 a valer $a(x_0 + h)$; o sea, el incremento de *y* que corresponde a un incremento *h* de *x* es $\Delta y = a(x_0 + h) - ax_0 = ah$. Por tanto, lo que varía *y* por cada unidad que varía *x* es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ah}{h} = a \tag{2}$$

Resulta que la derivada de una función lineal es el coeficiente *a* de *x*. Lo que significa que por cada unidad que varía *x*, *y* varía *a*.

La función real de variable real

$$y = ax + b \tag{3}$$

---

[1] Además Lucía Redondo Cortés ha hecho la figura 3.

[2] Las funciones reales de variable real son las funciones en las que los conjuntos de partida y de llegada son el conjunto R de los números reales. O sea, $y = f(x)$ es función real de variable real si $x \in R$ e $y \in R$.

donde a y b son números reales, se llama *función afín*. Para hallar su derivada se incrementa x desde x_0 una cantidad $\Delta x = h \neq 0$. Entonces y pasa de valer $ax_0 + b$ a valer $a(x_0 + h) + b$. El incremento de y es $\Delta y = a(x_0 + h) + b - (ax_0 + b) = ah$. Y lo que varía y por cada unidad que varía x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ah}{h} = a \tag{4}$$

Resulta que la derivada de cualquier función afín es también el coeficiente a de x. Nótese que, en realidad, las funciones lineales son funciones afines en que $b = 0$.

La derivada de cualquier función constante $y = f(x) = C$ es cero, pues si se incrementa x desde x_0 la cantidad $h \neq 0$, el valor y de la función no varía. Por tanto $\Delta y = 0$, por lo que el incremento de y por cada unidad que se incrementa x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{h} = 0 \tag{5}$$

Nótese que también las funciones constantes son funciones afines; pero ahora con $a = 0$.

En la vida común es habitual el empleo de estas derivadas. Por ejemplo, de ordinario, el importe y de cada producto que se adquiere en el mercado se halla multiplicando el precio a de cada unidad de producto (quilogramo, litro, metro...) por la cantidad x que se compre: $y = ax$. O sea, el importe y es función lineal de la cantidad x que se adquiere. Y resulta que el precio a de cada unidad de producto es la derivada de esa función $y = ax$; porque, en efecto, el precio a es lo que se incrementa el importe por cada unidad que se incrementa la cantidad de producto que se compra.

2. Derivada de una función en un punto

Intentaremos hallar la derivada de la función $y = x^2$ por el procedimiento anterior. Para ello incrementamos x en una cantidad $\Delta x = h \neq 0$ a partir del valor x_0. Lo que se incrementa entonces y es $\Delta y = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0 h + h^2$. Por tanto lo que varía y por cada unidad que varía x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h \tag{6}$$

Según (6) resulta que, para esta función, lo que se incrementa y por cada unidad que se incrementa x depende del valor x_0 a partir del que se hace el incremento de x. Pero también depende de la cantidad h que se incremente x. La figura 1, que es la gráfica de la función $y = x^2$, ayuda a aclarar lo dicho. Se ve que, realmente, (6) da un valor medio de lo que varía y por cada unidad que varía x; y que ese valor medio depende de h, o sea de lo que se incremente x. Así que (6) no da un solo resultado aunque se fije el valor x_0

del que se parte. Pero si se hace tender h a cero, (6) sí da resultado único para cada valor x_0, que es

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2x_0+h\right)=2x_0 \tag{7}$$

En ese caso ese resultado solo depende de x_0.

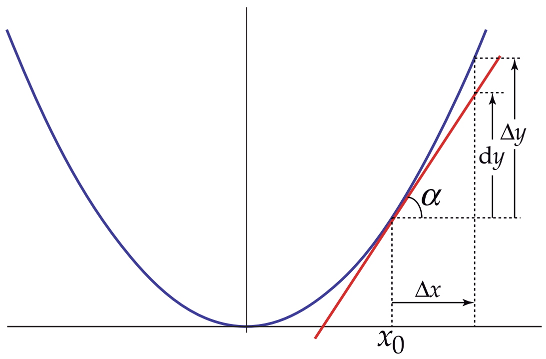

Fig. 1.- Gráfica de la función $y=x^2$.

Solo en las funciones afines el cociente $\Delta y/\Delta x$ no depende del origen x_0 de los incrementos. Tampoco ese cociente depende en esas funciones de la cantidad h que se incremente x_0. En todas las demás funciones el cociente $\Delta y/\Delta x$ depende de x_0 y del incremento h de x para hallarlo. Por eso en la definición de derivada conviene añadir que, en general, hay una derivada para cada punto x_0. Para que esa definición designe un valor único en cada x_0, habría que fijar el valor h en que se incrementa x_0 para hallar el cociente $\Delta y/\Delta x$. Pero fijar en todas las funciones un valor para h no conduce a ningún resultado general útil. Sin embargo se puede intentar para todas las funciones lo hecho arriba para la función $y=x^2$; que es hacer que h tienda a cero. Si entonces el cociente $\Delta y/\Delta x$ tiende a un único valor, ese valor es el mejor indicador de lo que varía y por cada unidad que varía x en los entornos más pequeños de x_0. Por eso, la definición que se ha adoptado universalmente de derivada en un punto x_0 de una función es la siguiente:

Se llama derivada de la función real de variable real $y=f\left(x\right)$ en el punto x_0 a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h} \tag{8}$$

Si ese límite existe, es un número real que se llama derivada de la función en ese punto x_0. Y se dice entonces que existe la derivada en x_0, que se designa por $\left.\mathrm{d}y/\mathrm{d}x\right|_{x_0}$. Esa derivada es buen indicador de lo que varía y por cada unidad que varía x en puntos muy próximos a x_0. Si no existe ese límite no existe derivada de $y=f\left(x\right)$ en x_0.

La mayor parte de las funciones que se emplean en ingeniería tienen derivada en todos sus puntos excepto, quizá, en algunos especiales. Las funciones $y=f\left(x\right)$ que tienen derivada en todos los puntos de algunos intervalos de x se llaman *funciones derivables* en esos intervalos.

3. Función derivada de una función

Por tanto, que una función real de variable real $y = f(x)$ tenga derivada en todos los puntos de algunos intervalos de *x* significa que a cada punto *x* de esos intervalos le corresponde su derivada, que se designa por

$$y' = f'(x) \tag{9}$$

Es decir, hallando la derivada en cada punto de una función real de variable real $y = f(x)$ se crea otra función real de variable real $y' = f'(x)$, que se llama *función derivada* de la primera. La primera, la función $y = f(x)$, se llama *función primitiva* de $y' = f'(x)$.

Todo lo dicho conduce a la siguiente definición de función derivada de otra:

Se llama función derivada de la función real de variable real $y = f(x)$ *a*

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{10}$$

En los puntos *x* en que ese límite exista, la función $y' = f'(x)$ existe o está definida, y es una función real de variable real. Se dice que la función $y = f(x)$ es derivable en esos puntos. En los puntos en que ese límite no exista, la derivada no existe, y se dice que la función $y = f(x)$ no es derivable en ellos.

La función derivada de la función $y = f(x)$ se designa por cualquiera de los tres miembros de las siguientes igualdades:

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{11}$$

El último miembro se lee derivada de *y* respecto a *x*. También, a veces, la función derivada de $f(x)$ se designa por $Df(x)$.

Las funciones derivadas de otras se obtienen aplicando la definición (10). Así se deducen las llamadas reglas de derivación, que son el conjunto de las derivadas de las funciones más frecuentes. Por ejemplo, tres de esas reglas son que la derivada de la función $y = x^n$ es $y' = nx^{n-1}$, que la derivada de $y = \operatorname{sen}(ax)$ es $y' = a\cos(ax)$ y que la derivada de una constante es cero.

Si se conoce la función derivada $y'(x)$ de una función $y(x)$, la derivada de $y(x)$ en cualquier punto x_0 se obtiene sustituyéndolo en $y'(x)$. Es decir, la derivada de $y(x)$ en x_0 es $y'(x_0)$.

4. Diferencial

La derivada de una función *y* en un punto x_0 es lo que varía esa función por cada unidad que varía *x* en los entornos más pequeños de x_0. Por ejemplo, que la derivada de una función en un punto es 2, significa que puede esperarse que en los entornos más pequeños de ese punto el incremento de *y* sea aproximadamente el doble que el incremento de *x*: $\Delta y \simeq 2\Delta x$. Pero la última expresión es solo aproximada. Por eso se prefiere escribir $\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$. En esta expresión $\mathrm{d}x$ es otra forma de designar Δx; pero, en general, $\mathrm{d}y$ no es igual a Δy (Fig. 1). No obstante, si la gráfica de la función es suficientemente suave, $\mathrm{d}y$ puede servir como estimación de lo que puede valer Δy.

La utilidad de hallar $\mathrm{d}y$ en vez de Δy es que $\mathrm{d}y$ se puede calcular más fácilmente que Δy, pues, para hallar $\mathrm{d}y$, ni siquiera hace falta conocer la función *y*, sino solo su derivada en el punto que se considere. Es decir, cualquiera que sea la función *y*, si se conoce su derivada y' en un punto , $\mathrm{d}y$ se obtiene del simple producto

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x \tag{12}$$

La (12) sirve, pues, para aproximar la función *y* en entornos de un punto del que se conoce su derivada y'. Es también la razón de que la función derivada se designe por $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, pues despejando, se obtiene

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{13}$$

La (12) es una función lineal que se llama *función diferencial* de *y* en el punto cuya derivada es y'. Si esa función se dibuja en un sistema de ejes cartesianos paralelos a los del sistema de la función $y = f(x)$, con origen de coordenadas en el punto $\left[x_0, y_0 = f(x_0)\right]$ en el que se ha hallado de derivada y', su representación gráfica resulta una recta tangente a la gráfica de la función *y* en el punto en que su derivada es y' (Fig. 2).

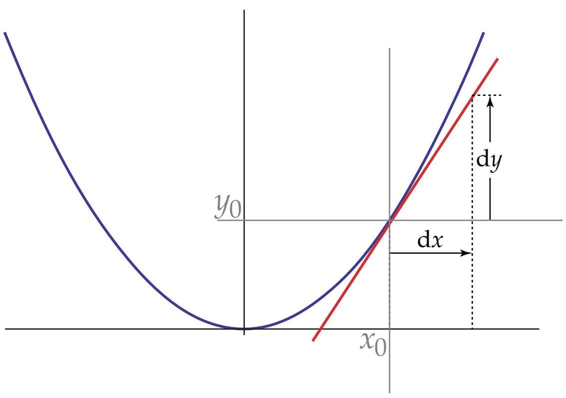

Fig. 2. La función $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$ dibujada en un sistema de coordenadas de ejes paralelos a los de la función $y = x^2$, con su origen en el punto (x_0, y_0).

Por tanto, *diferencial de una función y en un punto es la función* $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$, *donde* y' *es la derivada de la función y en ese punto*. Las expresiones $\mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}x$ se llaman, respectivamente, *diferencial de y* y *diferencial de x*. $\mathrm{d}x$ es la variable independiente y $\mathrm{d}y$ la variable dependiente de la función diferencial. Desde luego que esas variables pueden designarse con otras letras, por ejemplo se puede escribir $w = y'v$; pero la notación (12) es conveniente, pues informa de que se trata de una diferencial, es decir, que es la aproximación de una parte de una función por esa función lineal en los entornos más pequeños del punto en el que se halla la derivada; y que, si se representa en un sistema con sus ejes paralelos a los del sistema en que está representada la función y, con origen de coordenadas en el punto en el que se halla la derivada y', resulta una recta tangente a la gráfica de *y* en el punto $\left[x_0, y_0 = f\left(x_0\right)\right]$ en el que se halla y'. Así que, mientras la derivada de una función en un punto es un valor exacto si existe, la diferencial en un punto es una función lineal de aproximación. Por tanto, las funciones diferenciales de todas las funciones que tengan la misma derivada en un punto son iguales. O, de otra manera: todas las funciones cuyas derivadas en un punto son iguales tienen la misma diferencial en ese punto, se aproximan por la misma función diferencial en los entornos más pequeños de ese punto.

La aproximación de una función por su diferencial en los entornos más pequeños de un punto es de gran utilidad en ingeniería, pues permite estimar con facilidad y rapidez las variaciones de la función en esos entornos. Además el procedimiento es el mismo para todas las funciones derivables.

Por ejemplo, la derivada de la función $y = x^2$ es $y' = 2x$. Por tanto, la derivada en $x_0 = 0.5$ es $y'(0.5) = 1$. Significa que, en entornos pequeños de 0.5, *y* se incrementa aproximadamente 1 por cada unidad que se incremente *x*. Eso es lo que significa también que la diferencial es $\mathrm{d}y = 1\mathrm{d}x$.

En $x_0 = 3$ la derivada de $y = x^2$ vale 6. Significa que, en entornos pequeños de $x_0 = 3$, *y* se incrementa aproximadamente 6 unidades por cada unidad que se incremente *x*. O, también, que en $x_0 = 3$ es $\mathrm{d}y = 6\mathrm{d}x$. La función varía 6 veces más rápidamente en $x_0 = 3$ que en $x_0 = 0.5$.

Pendiente de una función en un punto

El ángulo que el plano de una carretera forma con el plano horizontal se llama ángulo de inclinación o, simplemente, *inclinación* de la carretera. Lo mismo para una calle, un ferrocarril o un canal. Como las carreteras suben y bajan, el ángulo de inclinación varía a lo largo de la carretera. Por eso, cuando se habla de la inclinación de una carretera hay que citar el punto quilométrico de ella, x_0, al que nos referimos, y la inclinación de la carretera en ese punto es la del plano tangente a ella en ese punto.

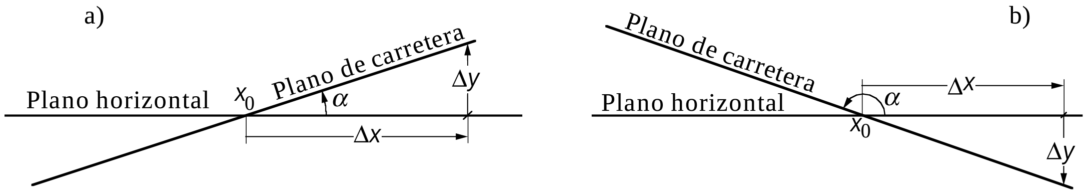

Fig. 3.- Inclinación y pendiente.

El ángulo de inclinación se mide a partir del plano horizontal en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (Fig. 3). Si ese ángulo está comprendido entre 0 y $\pi/2$, o sea, si es agudo (Fig. 3a), al avanzar hacia la parte positiva del eje *x* la carretera sube: se va cuesta arriba. Si el ángulo de inclinación está comprendido entre $\pi/2$ y π, ángulo obtuso, al avanzar hacia la parte positiva del eje *x* la carretera baja: se va cuesta abajo (Fig. 3b). Un tramo con 5º de inclinación es pues cuesta arriba. Uno con 175º es cuesta abajo.

Sin embargo, la inclinación no suele designarse por su ángulo sino por su *tangente*, que se llama *pendiente*[3]:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{14}$$

Si la cuesta es hacia arriba, $0 < \alpha < \pi/2$ y $\mathrm{tg}\alpha > 0$, la pendiente es positiva. También, para cada $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$, y (14) es positiva (Fig. 3a). Si la cuesta es hacia abajo, $\pi/2 < \alpha < \pi$, y $\mathrm{tg}\alpha < 0$, la pendiente es negativa. También, para cada $\Delta x > 0$, $\Delta y < 0$, y (14) es negativa (Fig. 3b). Es decir, la pendiente de una cuesta arriba es positiva, y la de una cuesta abajo es negativa. Así, la pendiente de la inclinación de 5º, es $\mathrm{tg}5° = 0.087 = 8.7/100 = 8.7\%$. La pendiente de 175º, que es cuesta abajo, es $\mathrm{tg}175° = -0.087 = -8.7/100 = -8.7\%$.

De la misma manera, el ángulo que una recta forma con el eje *x* se llama *inclinación de la recta*, y la tangente de ese ángulo se llama *pendiente de la recta*. Si una recta tiene la dirección de la tangente a la gráfica de una función en un punto, la pendiente de la recta se llama también *pendiente de la gráfica de la función* en ese punto (Fig. 1) o, simplemente, pendiente de la función en ese punto. La función diferencial $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$ en un punto de una función es la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Su pendiente, que es y', es, por tanto, la pendiente de la función en ese punto, es decir

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' \tag{15}$$

[3] Como la tangente de un ángulo pequeño vale casi lo mismo que el seno, las pendientes de las carreteras, ferrocarriles, canales, etc., cuyos ángulos de inclinación suelen ser pequeños, se identifican con el seno de ese ángulo. Es decir, en vez de dividir el incremento de altura, que es un cateto del triángulo rectángulo que resulta, por la longitud horizontal de la carretera, que es el otro cateto, se divide por la longitud de la carretera entre los dos puntos que se consideran, que es la hipotenusa de ese triángulo. De hecho, para ángulos pequeños, el seno, la tangente y el propio ángulo medido en radianes son números casi iguales. Por ejemplo, para $\alpha = 5°$, $\mathrm{tg}\alpha = 0.0875$; $\mathrm{sen}\alpha = 0.0872$; y $\alpha = 0.0873$.

O sea, *la derivada de una función en un punto es la pendiente de la función en ese punto*.

Crecimiento y decrecimiento de una función

Que una función y sea creciente en un punto x_0 significa que al movernos desde x_0 hacia la derecha en algún entorno de x_0, y aumenta en todo el recorrido dentro del entorno; y que si nos movemos hacia la izquierda, y disminuye en todo el recorrido del entorno. O sea, Δx e Δy tienen el mismo signo en todo el entorno. Eso ocurre en la figura 1 en los entornos más pequeños de x_0. Como consecuencia, el cociente $\Delta y/\Delta x$ es positivo en todo el entorno, y también, por tanto, la derivada y' de la función y en x_0. Es decir, si una función es creciente en un punto su derivada es positiva en ese punto. Pero también si la derivada en x_0 es positiva es que, en algún entorno de x_0, a cada Δx positivo corresponde un Δy positivo, y a cada Δx negativo corresponde un Δy negativo, por lo que la función es creciente. O sea, *si la derivada de una función en un punto es positiva, la función es creciente en ese punto, y viceversa*.

Por el contrario, que una función sea decreciente en un punto x_0 significa que al movernos desde x_0 hacia la derecha en algún entorno de x_0, y disminuye en todo ese recorrido. Y que si nos movemos hacia la izquierda en ese entorno y aumenta en todo el recorrido. O sea, que el cociente $\Delta y/\Delta x$ es negativo en todo el entorno, por lo que la derivada y' es negativa. Por tanto, si una función es decreciente en un punto su derivada es negativa en ese punto. Pero que la derivada sea negativa significa que el cociente $\Delta y/\Delta x$ es negativo en todos los puntos de algún entorno de x_0; o sea, que al movernos en el eje x hacia la derecha y disminuye, y que al movernos hacia la izquierda y aumenta, por lo que la función es decreciente en ese entorno. Es decir, *si la derivada de una función en un punto es negativa, la función es decreciente en ese punto, y viceversa*.

Como la derivada $y' = 2x$ de la función $y = x^2$ es negativa para $x < 0$, la función es decreciente para $x < 0$. Como esa derivada es positiva para $0 < x$, la función es creciente para $0 < x$. En $x = 0$ no es creciente ni decreciente. Se ve que estos resultados coinciden con lo que se observa en la gráfica de esa función.

El signo de la derivada de una función sirve por tanto para saber en qué puntos esa función crece o decrece sin necesidad de dibujar su gráfica.

Resumen

Se llama *función derivada* de la función real de variable real $y = f(x)$ a $y' = f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Se llama *derivada* de la función real de variable real $y = f(x)$ *en el punto* x_0 a $f'(x_0)$.

La derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x|_{x_0}$ *es* una buena medida de *lo que varía y por cada unidad que varía x* en los entornos más pequeños de x_0 .

Diferencial de una función *y* en un punto es la función lineal $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$, donde y' es la derivada de la función *y* en ese punto.

La gráfica de la diferencial de una función en un punto tiene la dirección de la la *recta tangente a la función* en ese punto.

Ángulo de inclinación de una recta es el ángulo α que la recta forma con el eje de abscisas. Se llama también simplemente *inclinación*.

Pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación ($\mathrm{tg}\alpha$).

Si $0 < \alpha < \pi/2$ (cuesta arriba), la pendiente es positiva. Si $\pi/2 < \alpha < \pi$ (cuesta abajo), la pendiente es negativa.

La *pendiente de una recta* es el coeficiente de la variable independiente de la función afín de que procede (toda recta es la representación gráfica de una función afín).

La *pendiente de una función y* en un punto es la pendiente de su diferencial $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$ en ese punto, o sea, la derivada y' de la función en ese punto.

En los puntos en que la derivada es positiva la función es *creciente* (cuesta arriba al movernos en sentido positivo del eje *x*). En los puntos en que la derivada es negativa la función es *decreciente* (cuesta abajo al movernos en sentido positivo del eje *x*).