Primitivas, integrales y teorema fundamental del cálculo

Félix Redondo Quintela y Roberto C. Redondo Melchor.
Universidad de Salamanca
8 de enero de 2014

El teorema fundamental del cálculo relacionó el moderno *cálculo de diferencias*, *calculus differentialis*, *cálculo diferencial*, que comienza en el siglo XVII, con los antiguos procedimientos de *cálculo exhaustivo* de áreas y volúmenes, con origen en el antiguo Egipto, incluidos después en el *calculus integralis*, *cálculo integral*. Se revisa aquí esa relación con el fin de aclarar algunos conceptos muy utilizados en física e ingeniería.

Cálculo diferencial

Si $f'(x)$ es la derivada de la función real de variable real $f(x)$, entonces $f(x)$ se llama *función primitiva* de $f'(x)$. Por ejemplo, como la derivada de $5x^2+2$ es $10x$, la función $5x^2+2$ es función primitiva de $10x$.

La función $f'(x)$ derivada de otra $f(x)$ es lo que se incrementa $f(x)$ por cada unidad que se incrementa x en cada punto[1].

Muchas magnitudes físicas y de ingeniería son funciones derivadas de otras. Así, el módulo de una velocidad es la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo, o lo que es lo mismo, lo que se incrementa el espacio recorrido cada unidad de tiempo. La potencia es la derivada de una energía respecto al tiempo. La intensidad de corriente eléctrica es la derivada de la carga que ha cruzado una superficie respecto al tiempo, o sea, la carga que cruza esa superficie cada unidad de tiempo.

La parte del conocimiento que se ocupa de las funciones primitivas y derivadas se llama *cálculo diferencial*. El adjetivo *diferencial* se debe a que estudia los cambios, los incrementos, las *diferencias* entre valores de una función para incrementos de su variable. De ahí que el concepto principal del cálculo diferencial sea el de derivada de una función, que es el cambio (diferencia) de la función por cada unidad que cambia la variable independiente.

---

[1] Félix Redondo Quintela y Roberto C. Redondo Melchor. *Conceptos de derivada y diferencial*. http://electricidad.usal.es/Comentarios

El cálculo diferencial se inició en el siglo XVII a partir de trabajos de Isaac Newton y Gottfried Leibniz principalmente.

Cálculo integral

Heródoto, del siglo V a. de Cristo, y otros autores antiguos citan a los egipcios como conocedores de procedimientos para hallar áreas, principalmente de terrenos de cultivo. De esa actividad procede el nombre *geometría*, que significa medida de la tierra (en griego *γεωμετρία*, *γεω*, geo, tierra, y *μετρία*, metría, medida).

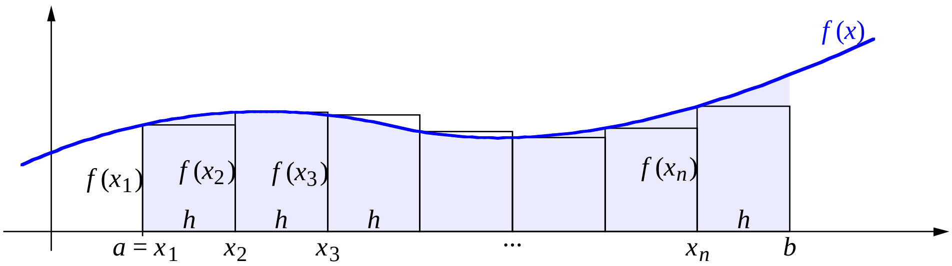

Fig. 1.- Área de una superficie de borde curvo como suma aproximada de áreas de rectángulos.

Pero, en general, la medida de volúmenes, áreas y perímetros ocupó a muchos en la antigüedad. Especial interés tienen las medidas de superficies limitadas por curvas, tema en el que destacó Arquímedes, del siglo III a. de C. Uno de los procedimientos para hallarlas consistía en ir aproximándolas por sumas de áreas de figuras cuyas áreas se hallan fácilmente. Así, el área A (en azul en la figura 1) limitada por la curva $f(x)$, el eje de abscisas y las perpendiculares a él en a y b, es próxima a la suma de las áreas de los rectángulos dibujados, todos de base h. Es decir,

$$A \simeq \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,h$$

La aproximación es tanto mayor cuanto más exhaustivamente se recubra con esos rectángulos el área que se pretende hallar. Por eso este método se llamó *método exhaustivo*. Fue aplicado de manera generalizada para hallar áreas limitadas por curvas y, también, con las variantes necesarias, para hallar volúmenes limitados por superficies no planas.

Con el concepto actual de límite, creado por Cauchy en la segunda década del siglo XIX, se puede escribir la fórmula anterior de manera exacta como el límite al que tiende la suma cuando la base h de cada rectángulo tiende a cero, que ocurre cuando n tiende a infinito:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,h$$

Ese límite se indica con la expresión

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

El signo $\int$ quería indicar la suma *integral*, la suma total de esos productos. Se llama signo *integral*, y se lee *integral*. El área *A* se llama *integral definida* entre los extremos *a* y *b*. Los métodos para hallar esas sumas de productos, esas integrales lo más aproximadamente que se pueda, constituyen el cálculo integral.

Teorema fundamental del cálculo

Como hemos dicho, el cálculo de las sumas de productos que llamamos hoy cálculo integral se vino desarrollando desde el antiguo Egipto. Independientemente, mucho tiempo después, a partir del siglo XVII, con Newton, Leibniz y otros, comenzó a desarrollarse el cálculo diferencial alrededor del concepto de derivada de una función. El cálculo integral y el cálculo diferencial aparecen así como dos ramas separadas del conocimiento. Sin embargo, como se mostrará a continuación, el teorema fundamental del cálculo establece entre ellas un nexo que las relaciona íntimamente.

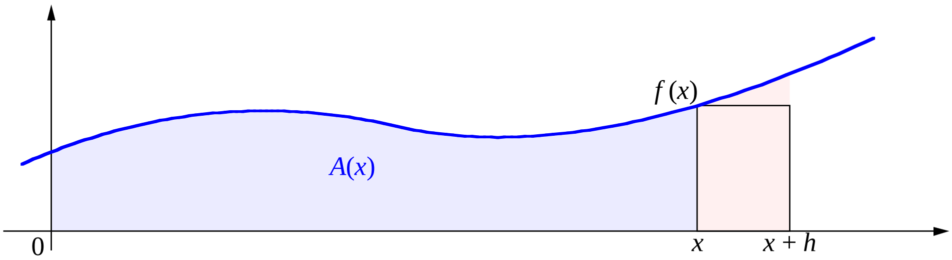

Fig. 2.- Área debajo de una curva, desde el origen hasta *x*.

Sobre la figura 2, el área bajo la función $f(x)$ desde el origen $x = 0$ a cualquier otro valor *x* es una función de *x* que designaremos por *A*(*x*). El área $A(x+h) - A(x)$ bajo $f(x)$ entre *x* y $x+h$ es aproximadamente igual a $f(x)h$, que es el área del rectángulo de base *h* que empieza en *x*. O sea,

$$A(x+h) - A(x) \simeq f(x)h$$

La aproximación entre los dos miembros de la fórmula anterior se transforma en igualdad cuando *h* tiende a cero. Dividiendo por *h* la fórmula anterior queda

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \simeq f(x)\,,$$

que, como se ha dicho, se transforma en igualdad cuando *h* tiende a cero. Es decir,

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$$

Pero el primer miembro es la derivada $A'(x)$ de la función $A(x)$ en el punto *x*:

$$A'(x)=f(x)$$

O sea, el área $A(x)$ que se busca es una función de *x* cuya derivada $A'(x)$ es $f(x)$. Por tanto, $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Así que, utilizando la expresión de integral, la última igualdad se puede escribir de estas formas

$$A'(x)=\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left[\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right]}{\mathrm{d}x}=f(x)$$

Por otra parte, el área entre $x=a$ y $x=b$ (Fig. 3), que se indica por $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, se puede calcular hallando el área desde $x=0$ hasta $x=b$, y restándole el área desde $x=0$ hasta $x=a$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_0^b f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=A(b)-A(a)$$

Donde

$$A(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$$

es función primitiva de $f(x)$.

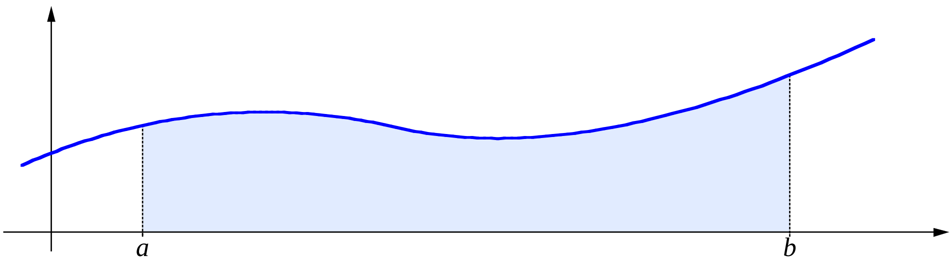

Fig. 3.- Área debajo de una curva, desde *a* hasta *b*.

Como se ve, esta es una conclusión de gran utilidad, pues si se conoce la función $f(x)$, el área limitada por su representación gráfica con el eje de abscisas y las perpendiculares en $x=a$ y $x=b$ (Fig. 3) se calcula exactamente hallando $A(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$, que es una primitiva de $f(x)$, y obteniendo después la diferencia $A(b)-A(a)$, que es lo que significa la expresión $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Pero el problema no parece estar resuelto todavía, pues saber que $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$ no es suficiente para hallar $A(x)$ a partir de $f(x)$, ya que hay infinitas primitivas de $f(x)$. Sin embargo, como de lo que se trata es de hallar el área comprendida entre dos valores de *x*, tales como $x=a$ y $x=b$, cualquier primitiva de $f(x)$ vale. En efecto, supongamos que $A_1(x)$ y $A_2(x)$ son dos primitivas de $f(x)$. Eso significa que difieren en una constante. Es decir, que

$$A_2(x)=A_1(x)+K$$

Si para hallar el área entre $x=a$ y $x=b$, o sea, la integral entre *a* y *b*, se utiliza $A_2(x)$, se obtiene el mismo resultado que con $A_1(x)$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_2(b)-A_2(a)=\left(A_1(b)+K\right)-\left(A_1(a)+K\right)=A_1(b)-A_1(a)$$

Es decir, cualquier primitiva de $f(x)$ que se utilice proporciona el mismo resultado.

Este es el *teorema fundamental del cálculo*. Muestra la manera de hallar exactamente la suma, que llamamos integral, de productos de valores de una función $f(x)$ por incrementos de *x*. Para eso basta encontrar cualquier función primitiva $A(x)$ de $f(x)$.

Este teorema es la unión del cálculo integral y del cálculo diferencial. Al conjunto de los dos se llama *cálculo infinitesimal*, por el nombre de *infinitésimos* que se dio a las cantidades cuyo límite tiende a cero, como *h* en este artículo.

El teorema fundamental del cálculo puede demostrarse sin hacer alusión al cálculo de áreas. La forma en que se ha expuesto aquí se ha considerado útil para explicar la relación entre el cálculo integral y el cálculo diferencial, y para justificar las notaciones que se emplean[2].

La notación

La unión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral que establece el teorema fundamental del cálculo ha dado lugar a notaciones que pueden originar cierta confusión. Se debe a que un mismo objeto matemático puede designarse de maneras distintas, que proceden unas del cálculo integral, y otras del cálculo diferencial.

La *función derivada* de una función $f(x)$ se designa habitualmente por

[2] La organización formal de la teoría de la integración y su consecuente generalización se debe principalmente a Riemann (Breselenz, Alemania, 1826-66), y se conoce como *Teoría de la Integral de Riemann* o, simplemente, *Integral de Riemann*.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

También, a veces, como $\mathrm{D}(x)$.

Una *función primitiva* de $f(x)$ se designa a veces por $F(x)$. Pero como el área bajo $f(x)$ desde un punto *a* hasta cualquier *x*, es una primitiva de $f(x)$, que se designa con $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$, también esa primitiva de $f(x)$ se designa como

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\,,$$

y se nombra como *integral definida* entre *a* y *x*. Si $a \neq b$, las funciones primitivas $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ y $\int_b^x f(x)\mathrm{d}x$ de $f(x)$ difieren en una constante.

También es muy frecuente designar a *cualquier función primitiva* de $f(x)$ con la notación

$$\int f(x)\mathrm{d}x\,,$$

sin límites de integración. Entonces esa expresión se llama *integral indefinida* de $f(x)$.

Por tanto,

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

es una primitiva concreta de $f(x)$, determinada por el origen *a* de la integral definida.

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

designa cualquier primitiva de la función $f(x)$.

Aunque poco frecuentemente, algunos autores designan a cualquier primitiva de $f(x)$ por

$$\int f(x)$$

sin $\mathrm{d}x$ al final, e incluso por

$$\int f$$

que designa cualquier función primitiva de la función *f*.