Teoría de conjuntos

Félix Redondo Quintela y Roberto C. Redondo Melchor
Universidad de Salamanca
28 de octubre de 2023

Una teoría comienza con algo que se expresa de forma precisa. Lo llamamos axioma o conjunto de axiomas. Diciendo de otras maneras contenidos de lo dicho se deducen los teoremas y se crean definiciones. Los axiomas, los teoremas y las definiciones constituyen la teoría.

Organizar así el conocimiento es una manera eficaz para crearlo y transmitirlo. La ciencia, en particular las teorías físicas, suelen presentarse de esa manera, a partir de leyes precisas bien identificadas. También la teoría de los números se inicia dando el nombre *números naturales* a 1, 1+1, 1+1+1, …, una expresión precisa y clara que es su axioma.

Teoría de conjuntos

Sin embargo, la *teoría de conjuntos*, iniciada por Georg Cantor a finales del siglo XIX, no se presenta a partir de algo dicho con contenido preciso, sino de lo que se ha venido llamando *idea intuitiva de conjunto*. O, si se prefiere, que su axioma de partida es lo que se entiende con 'idea intuitiva de conjunto'; un adjetivo, *intuitiva*, poco preciso para cada uno, menos para todos, y menos aún en idiomas diferentes.

En español, 'objetos', 'elementos', 'cosas', nombran partes que percibimos separadas unas de otras. A las que tienen una característica común o se la asignamos las llamamos 'conjunto'. Las personas presentes en una sala se notan bien. Cada una la vemos separada de las demás, y a todas las podemos designar como el 'conjunto de las personas de esa sala'. El agua de un vaso, sin embargo, no se nos presenta como un conjunto de cosas, no la vemos como partes separadas unas de otras. Entre esos extremos hay grados. Un montón de trigo se nos aparece más como una parva que como un conjunto de granos.

No todos los conjuntos se muestran tan intuitivos ("**intuir**: Percibir ... como si se ... tuviera a la vista" Diccionario de la Lengua Española). Muchas veces son una solución para reproducir en el lenguaje lo que percibimos o creamos. Que hoy describamos un vaso de agua como un conjunto de moléculas no es porque así se nos aparezca a la vista, sino que se trata de un resultado del intento de conocer. La distancia en línea recta entre Ávila y Salamanca no son cosas que vemos, sino que el conjunto de sus ochenta y nueve quilómetros es una solución para nombrarla y compararla con otras distancias; de hecho, cualquier longitud se puede designar con leguas, metros, nanómetros o años luz, sin que ninguno de esos conjuntos aparezca a la vista.

Por otra parte, no llamamos conjunto de personas a una sola en una habitación, y menos aún si no hay ninguna, que es la negación de cualquier conjunto de ellas; sin embargo, '*conjunto unitario*' (conjunto de una sola cosa), y '*conjunto vacío*' (conjunto de nada), forman parte de la teoría de conjuntos.

Filosofía

Lo de 'intuitiva' podría interpretarse como que la teoría de conjuntos pretende examinar lo que designamos como 'conjunto'. Aunque enseguida se dirige a los conjuntos de números; lo que no es de extrañar, pues es donde más encuentra, infinitos, con un conocimiento preciso de cada uno, incluidas propiedades impensables sin ellos.

Pero a veces se considera algo así como una teoría de las teorías, en especial de las matemáticas, y pasa a mostrar los números como engendrados por los conjuntos: el 3 sería la propiedad que *observamos* en todos los de tres elementos, el 1000 la que *observamos* en todos los que tienen mil…

Percibir esa propiedad en los conjuntos de mil elementos y distinguirlos por ella de los de mil uno, mil dos, …, no parece nada fácil sin los números. Sin ellos, ni siquiera podríamos nombrar aquí esos conjuntos, identificarlos. Además, los hay que solo los conocemos como conjuntos de números (los de más de un cuatrillón de elementos, por decir algo). No parece posible, por tanto, que la *percepción* de esa propiedad en los conjuntos haya originado los números. Por el contrario, con los números creamos infinitos conjuntos que sin ellos no existirían, y nos servimos de los números para conocer mucho de otros. Sin embargo, algo así como que los conjuntos son el origen de los números da la impresión de transmitirse.

Fundamento lógico de las matemáticas

A reflexiones como la anterior se responde en ocasiones que presentar los números naturales a partir de los conjuntos pretende "fundamentar lógicamente las matemáticas", o expresiones similares. Sin embargo, no parece que una teoría (axiomas, definiciones y teoremas) necesite como arranque nada distinto de "algo dicho con contenido preciso". Es verdad que eso dicho, los axiomas, pueden ser expresiones de lo que percibimos como real, de lo que creemos, de lo que imaginamos,... Quizá con 'fundamentar lógicamente una teoría' se quiera decir 'encontrar un porqué de sus axiomas'. Sin embargo, es solo de ellos, de lo trasladado al lenguaje, de donde se deduce la teoría. La de los *números naturales*, de dar ese nombre a 1, 1+1, 1+1+1,..., sean evolución de *este, otro, otro*, …, el resultado de emparejar los elementos de todos los conjuntos, o una creación de los dioses.

Aunque lo más natural parece lo primero, que los números hayan ido surgiendo de sucesiones como *este, otro, otro*, …, que observamos en muchos procesos y situaciones, también en los conjuntos. Designándola por 1, 1+1, 1+1+1, …, por 1, 2, 3, …, se consigue identificar cada *otro* de ella por un símbolo que, además, indica cuál es su *otro* siguiente. Así, el *otro* que sigue al que llamamos 7422 es 7423; y el que sigue a 'novecientos noventa y nueve' es 'mil'. Esa es la esencia de los números naturales, que cada uno identifica también su siguiente. Justo lo que aprendemos al contar.