Significado de uno elevado a infinito, 1^{∞}

Félix Redondo Quintela, Roberto C. Redondo Melchor, y Norberto Redondo Melchor.
Universidad de Salamanca.
28 de enero de 2013

Si se pregunta cuánto vale *uno elevado a infinito*, la respuesta suele ser que 1^{∞} es una indeterminación, o que no se puede saber con seguridad el valor de 1^{∞}, o que 1^{∞} puede tener cualquier valor. Sin embargo, la mejor respuesta es que 1^{∞} no tiene significado matemático, no designa ningún objeto matemático. Lo mismo que $7/0$ o cualquier número dividido por cero, que tampoco designa ningún objeto matemático. O lo mismo que árbol/naranjas (árbol dividido por naranjas), o cobre$^{\text{agua}}$ (cobre elevado a agua), que no significan nada aunque se utilicen símbolos que sí tienen significado cuando están combinados con otros símbolos. El signo de división / tiene significado en $4/2$, pero no lo tiene, como hemos dicho, en árbol/naranjas. 'Elevado a' tiene significado en 4^2, pero carece de él en 1^{∞}. Tampoco tienen significado matemático expresiones como $0/0$, ∞/∞ o $\infty/0$.

Sucesiones cuyo límite es de la forma indeterminada uno elevado a infinito

Si es a_n el término general de una sucesión cuyo límite es 1, y el límite de otra de término general b_n es infinito, se podría pensar que el límite de la sucesión $(a_n)^{b_n}$ es $\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = 1^{\infty}$, lo que no es cierto, pues 1^{∞} no es ningún número (ni siquiera 1), ni es infinito. 1^{∞} no significa nada.

Hay infinitas sucesiones de esa forma. Pero cada una tiene su límite. Para referirnos a esa clase de sucesiones, para citarlas, se dice que son sucesiones cuyo límite es de la forma indeterminada uno elevado a infinito. Sin embargo, nótese que esa expresión solo pone un nombre a ese conjunto de sucesiones. La expresión 'uno elevado a infinito' o 1^{∞} forma parte de ese nombre. Y se debe, precisamente, al símbolo que aparece si se hacen las operaciones $\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n}$. Pero en este caso ninguno de los dos miembros de la igualdad $\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = 1^{\infty}$ tiene significado matemático.

Por tanto, la expresión 'uno elevado a infinito' es parte del nombre de la clase de sucesiones de la forma $(a_n)^{b_n}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, que se llaman sucesiones cuyo límite es de la forma indeterminada 1^∞. Lo mismo ocurre con otras expresiones parecidas y otras sucesiones y funciones. Por ejemplo, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces la sucesión a_n/b_n no tiene por límite $0/0$, que tampoco tiene significado. Pero esas sucesiones suelen llamarse sucesiones de límite de la forma indeterminada $0/0$.

Límite de la sucesión 1^n

El límite de la sucesión 1^n es 1. Es decir, $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$. La prueba es que 1^n es 1 aunque n sea tan grande como se quiera, pues 1^n se obtiene multiplicando 1 por sí mismo n veces, que siempre da 1. No hay ningún número natural a partir del cual 1^n valga un número distinto de 1. Siempre vale 1. Por tanto $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

El número e

La sucesión más importante del conjunto de las sucesiones de límite de la forma indeterminada 1^∞ es la sucesión de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. En ella $a_n = 1+\frac{1}{n}$ y $b_n = n$. El límite de $1+\frac{1}{n}$, es 1, y el de n es infinito. Es, por tanto, una sucesión cuyo límite es de la forma 1^∞. El límite de esa sucesión se halla en los libros de matemáticas del bachillerato, y se llama número *e*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Es muy instructivo hallar aproximaciones al número e con una calculadora: el término primero $(n=1)$ de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ vale $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$. Redondeando a dos cifras decimales, el décimo vale $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \simeq 2.59$, el término 1000 vale $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \simeq 2.72$, el término un millón vale $\left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{10^6} \simeq 2.72$. Para términos más alejados ya no se modifica la segunda cifra decimal. Por eso, 2.72 es el valor del número e cuando solo interesan dos cifras decimales.

Si se hace lo mismo con la sucesión 1^n, se tiene: para $n = 1$, $1^1 = 1$, para el término un millón, $1^{1000000} = 1$, y así. Siempre 1.

Conclusiones

1^{∞} carece de significado matemático, no es un número, ni tampoco significa infinito ni menos infinito.

$\lim_{n\to\infty} 1^n$ sí tiene significado preciso. Es otra forma de escribir 1: $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} 1^n \neq 1^{\infty}$.