Coeficiente de amortiguamiento, constante de tiempo y periodo de semidesintegración

Félix Redondo Quintela y Roberto Carlos Redondo Melchor
Universidad de Salamanca
2 de enero de 2012

Función exponencial decreciente y coeficiente de amortiguamiento

Los valores de algunas magnitudes, que designaremos por $y(t)$, varían con el tiempo t según la función exponencial:

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{1}$$

donde A y λ son números reales positivos. Para t=0 resulta $y(0)=A$. Es decir, el coeficiente A de la función (1) siempre es el valor de $y(t)$ para t=0, por lo que aquí escribiremos esa función así:

$$y(t) = y(0)\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{2}$$

que está representada en la figura 1 a partir de t=0.

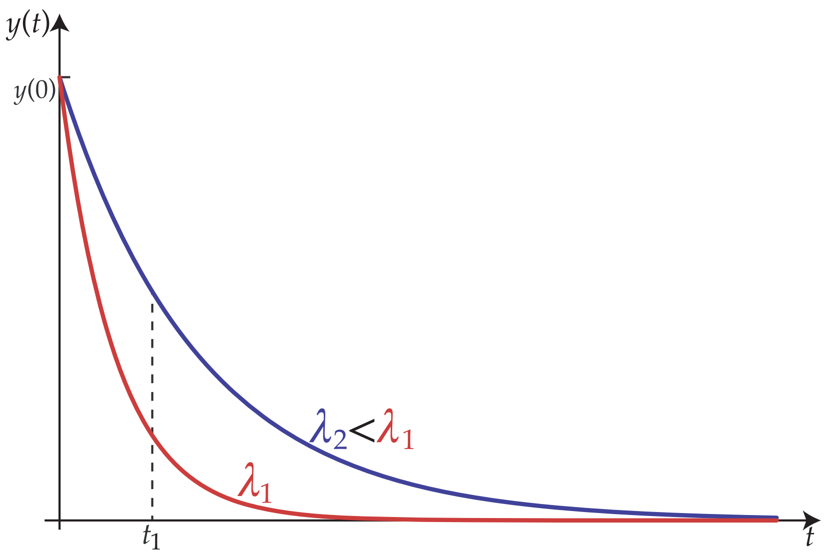

Fig. 1.- Dos funciones exponenciales decrecientes con el mismo valor inicial.

Como se ve en la figura 1, $y(t)$ decrece desde su valor inicial $y(0)$ hasta acercarse asintóticamente a cero. Por eso llamaremos a (2) función exponencial *decreciente*. El decrecimiento es más o menos rápido dependiendo del valor de λ. Para un mismo valor de t, tal como t_1 (Fig. 1), $e^{-\lambda t} = 1/e^{\lambda t}$ es menor si λ es mayor. Por tanto λ puede utilizarse como indicador de la rapidez del decrecimiento de $y(t)$, y se llama por eso *coeficiente de amortiguamiento* de la función exponencial decreciente. Cuanto mayor sea el coeficiente de amortiguamiento de una función exponencial decreciente más rápidamente decrece la función.

Como λt del exponente de (2) es adimensional y t designa al tiempo, la dimensión de λ es tiempo a la menos uno, es decir, su unidad en el Sistema Internacional de Unidades es s^{-1}.

Constante de tiempo

Pero en vez de λ, puede utilizarse su inverso

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

como indicador, ahora de la lentitud del decrecimiento, pues como τ es el inverso de λ, cuanto mayor sea τ más lentamente decrece la función, que se puede escribir así:

$$y(t) = y(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{4}$$

De (3) se deduce que la dimensión de τ es tiempo, o sea su unidad en el Sistema Internacional de Unidades es el segundo. Por eso τ se llama *constante de tiempo* de la función exponencial.

Como $y(t)$ tiende a cero a medida que pasa el tiempo, podemos preguntarnos cuándo se puede considerar que $y(t)$ está ya suficientemente próxima a cero. Para muchos fines esa proximidad es suficiente cuando ha pasado un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo, $t = 5\tau$, pues entonces

$$y(5\tau) = y(0)e^{-\frac{5\tau}{\tau}} = y(0)e^{-5} = 0.0067y(0) \tag{5}$$

Es decir, pasado un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo, $y(t)$ vale menos que la centésima parte de su valor inicial $y(0)$. Si es necesaria mayor aproximación a cero se puede dejar pasar más tiempo. Así, si $t = 10\tau$, $y(t)$ vale

$$y(10\tau) = y(0)e^{-\frac{10\tau}{\tau}} = y(0)e^{-10} = 0.000045y(0) \tag{6}$$

menos que una diezmilésima parte de su valor inicial $y(0)$.

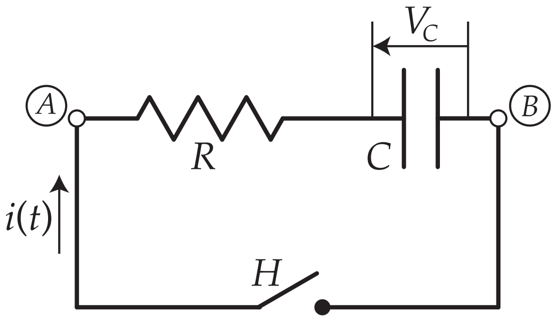

Fig. 2.- Dipolo *RC* (resistencia condensador) serie.

Por ejemplo, supongamos que el condensador del dipolo *AB* de la figura 2 está cargado con una tensión V_C. Si en $t = 0$ se cierra el interruptor *H*, la intensidad es

$$i(t) = \frac{V_C}{R} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = i(0) \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{7}$$

donde

$$i(0) = \frac{V_C}{R} \tag{8}$$

La constante de tiempo de la intensidad (7) es

$$\tau = RC \tag{9}$$

que es una característica del propio dipolo. Se ve que la unidad de τ de (9) es

$$\Omega \mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{A}} = \mathrm{s} \tag{10}$$

Pasado un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo desde que se cerró el interruptor, la intensidad vale $0.0067 i(0) = 0.0067 \left(V_C / R \right)$.

En electricidad se utiliza mucho la constante de tiempo como indicador de la lentitud del decaimiento de las funciones exponenciales decrecientes.

En resumen:

1. Cuanto mayor sea τ más lentamente decae el valor de la función.

2. Cinco veces la constante de tiempo puede ser un tiempo razonable para considerar próximo a cero el valor de la función.

3. La constante de tiempo se mide en segundos.

Periodo de semidesintegración

Otro indicador de rapidez de decrecimiento de las funciones exponenciales decrecientes es el *periodo de semidesintegración*. Su nombre se debe a que se utiliza como indicador de la rapidez con que se desintegran los átomos de una masa de elemento radiactivo. Resulta que si se tienen N átomos, el número en que se incrementan esos átomos cada unidad de tiempo por desintegración es $-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ (el signo menos es porque ese incremento es negativo, es una disminución), y resulta proporcional al número N de átomos que quedan sin desintegrar. Es decir,

$$-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\lambda N \qquad (11)$$

λ se llama *constante de desintegración*, y es una característica de cada isótopo radiactivo. La solución de la ecuación diferencial (11) da la relación entre el número de átomos que quedan sin desintegrar y el tiempo. Para obtener esa solución, se separan variables en (11) y resulta

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=-\lambda\mathrm{d}t \qquad (12)$$

Integrando ambos miembros da

$$\ln N-\ln A=-\lambda t \qquad (13)$$

donde $-\ln A$ es la constante de integración. La (13) puede ponerse como

$$\ln\frac{N}{A}=-\lambda t \qquad (14)$$

Y también

$$\frac{N}{A}=\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (15)$$

y, por último,

$$N=A\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (16)$$

Si en (16) se hace $t=0$, resulta, como ya se dijo, que $N(0)=A$, por lo pondremos (16) como

$$N=N(0)\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (17)$$

$N(0)$ es el número inicial (en $t=0$) de átomos sin desintegrar.

Según (17) resulta que el número de átomos sin desintegrar va disminuyendo según una exponencial decreciente. Y se ve que el coeficiente de amortiguamiento de esa función es la constante de desintegración.

La constante de tiempo τ es el inverso de λ, por lo que (17) también se puede poner como

$$N = N\left(0\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{18}$$

Pero en radiactividad no suele utilizarse la constante de tiempo como indicador de la velocidad de desintegración, sino que se prefiere el tiempo σ que ha de transcurrir para que de los $N(0)$ átomos radiactivos iniciales queden solo la mitad, $N(0)/2$, sin desintegrarse. Eso se expresa en (18) haciendo $N = N(0)/2$ cuando $t = \sigma$:

$$\frac{N(0)}{2} = N\left(0\right)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\tau}} \tag{19}$$

O

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\tau}} \tag{20}$$

Obteniendo logaritmos neperianos en los dos miembros de (20) queda:

$$-\ln 2 = -\frac{\sigma}{\tau} \tag{21}$$

De donde σ, que se llama *periodo de semidesintegración*, resulta:

$$\sigma = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{\lambda} \tag{22}$$

Como $\ln 2$ es adimensional, se ve en (22) que la dimensión de σ es la misma que la de τ, es decir, tiempo; y su unidad en el Sistema Internacional de Unidades es, por tanto, el segundo.

La (22) da la relación entre la constante de tiempo τ, el periodo de semidesintegración σ, y la constante de desintegración o coeficiente de amortiguamiento λ. Los tres parámetros son indicadores de la velocidad de decrecimiento de las funciones exponenciales decrecientes, aunque sus nombres puedan ser diferentes según el proceso concreto descrito por cada función. En general, se prefiere la constante de tiempo τ en los procesos de decaimiento rápido, cuando τ vale algunos segundos o menos, como suele ocurrir en las redes eléctricas, y σ para los procesos de decaimiento lento, como la desintegración de los isótopos radiactivos. Por ejemplo, el periodo de semidesintegración del uranio 235 es 703.8 millones de años, que significa que el proceso natural de desintegración conduce a que, justo cuando hayan pasado esos años, en una masa de uranio 235 quedará la mitad de átomos de uranio 235 de los que hay ahora.

Como $\ln 2 \simeq 0.69$, la (22) se puede escribir así:

$$\sigma \simeq 0.69\tau = \frac{0.69}{\lambda} \tag{23}$$

que permite hallar cualquier parámetro de los tres si se conoce uno.