Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Félix Redondo Quintela, Roberto C. Redondo Melchor.
Universidad de Salamanca
26 de octubre de 2014

En el análisis de redes eléctricas y en otras partes de la física y de la ingeniería surgen ecuaciones diferenciales. En ocasiones el recuerdo que de ellas se tiene es confuso. Este artículo se escribe como ayuda para esos casos pensando en algunas aplicaciones concretas de análisis de redes eléctricas[1].

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación en la que aparecen derivadas ordinarias (no derivadas parciales) *de la incógnita*. Por ejemplo,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

es una *ecuación diferencial ordinaria cuya única incógnita es i*. La variable t respecto a la que se deriva la incógnita i se llama *variable independiente*. La ecuación anterior indica que sus soluciones son las funciones i cuyas derivadas primeras respecto a t son cero. Sabemos que solo si i no es función de t su derivada es cero. Por tanto, las soluciones de esa ecuación diferencial son todas las funciones C independientes de t. Esas funciones se llaman *constantes* porque no dependen de la variable independiente, aunque pueden depender de otras variables. En el análisis de redes eléctricas la variable independiente suele ser el tiempo. Entonces, que la solución de la ecuación diferencial anterior es una constante significa que i no es función del tiempo, pero puede serlo de cualesquiera otras variables, como la temperatura, la humedad, la presión, etc.

La ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = a$$

donde a no es función de t, tiene por soluciones las funciones

$$i = at + b$$

[1] Ver Félix Redondo Quintela, Roberto C. Redondo Mechor. *Redes eléctricas de Kirchhoff 2ª edición*. Ed. REVIDE. Béjar, 2005, pp. 239-272, y 427-446.

con b independiente de t. La única razón para hacer esta afirmación es que si en la ecuación diferencial se sustituye i por $at+b$ se cumple la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}(at+b)}{\mathrm{d}t}=a$$

Solucionar ecuaciones diferenciales

Para sumar números reales hay una regla, un procedimiento. El que lo sepa sabe sumar cualesquiera números reales, pues, aplicando el procedimiento encuentra siempre el número real que es esa suma, encuentra la solución. También para restar, multiplicar y dividir hay reglas generales. Pero para hallar primitivas, integrales, no hay regla general. Lo mismo ocurre con las ecuaciones diferenciales. No hay regla general para obtener sus soluciones. Solo la que establece la propia ecuación diferencial: si una función es solución, al ser sustituida en la ecuación diferencial debe cumplirse la igualdad. Esta es la única regla: satisfacer la ecuación diferencial. Por eso, una gran parte del estudio de las ecuaciones diferenciales consiste en buscar formas de solucionarlas, en encontrar funciones que las satisfagan. En general, los caminos para encontrar esas soluciones son distintos para distintos tipos de ecuaciones.

Además, todas las ecuaciones diferenciales tienen infinitas soluciones. Por eso, que una función o conjunto de funciones sean soluciones de una ecuación diferencial no asegura que no haya más funciones que también lo sean. Esta es la razón por la que se ponen algunos adjetivos a las soluciones. Así, se llama *solución particular* a cualquier función que sea solución de la ecuación diferencial. Y se llama *solución general* a una función con parámetros de la que se obtienen las soluciones particulares dando valores concretos a esos parámetros. Pero, incluso, puede haber ecuaciones diferenciales con soluciones que no se obtienen dando valores a los parámetros de la solución general. Estas soluciones se llaman *soluciones singulares*. Saber si con un procedimiento de resolución se ha llegado a obtener todas las soluciones de una ecuación diferencial es, por tanto, otro tema de estudio.

Nosotros aquí no nos ocuparemos de la discusión de esos temas. Aunque sí es importante saber para cada ecuación diferencial si la solución general a la que se ha llegado da o no todas sus soluciones particulares.

En este artículo nos ocuparemos solo de dos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias especialmente útiles en el análisis de redes eléctricas y en otras partes de la física y la ingeniería. En este caso, las soluciones generales a las que llegamos sí dan todas las soluciones particulares.

Orden de una ecuación diferencial

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que tienen solo derivadas de primer orden de la incógnita se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*. Las dos ecuaciones puestas como ejemplo en el parágrafo 'Ecuaciones diferenciales ordinarias' son de primer orden, pues solo contienen la derivada primera de la incógnita. Si hay alguna derivada de segundo orden de la incógnita, sin que haya otras derivadas de orden superior, la ecuación se llama *ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.* En general, *el orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden de la incógnita*.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Las ecuaciones de la forma

$$a_n(t)\frac{\mathrm{d}^n i}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1} i}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+a_0(t)i=v(t) \qquad (1)$$

se llaman ecuaciones diferenciales ordinarias *lineales*. Los términos $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_1(t)$, $a_0(t)$ se llaman *coeficientes* de la ecuación diferencial lineal. El término $v(t)$ se llama *término independiente* para distinguirlo de los coeficientes; porque, como ellos, no depende de la incógnita i. En general, los coeficientes y $v(t)$ son funciones de la variable t, aunque pueden no depender de ella, ser constantes.

Las ecuaciones como (1) se llaman *lineales* porque la contribución de cada derivada al término independiente es lineal. Es decir, si una derivada se duplica, triplica..., su contribución al término independiente se duplica, triplica...; en general, si la derivada se multiplica por cualquier número, su contribución al término independiente se multiplica por ese número. Esta afirmación incluye a la derivada de orden cero, que es i: si i se multiplica por cualquier número su contribución al término independiente queda multiplicada por ese número.

Por tanto, las ecuaciones como (1) se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden n*.

Si $v(t)$ es constante de valor cero, la ecuación se llama *homogénea*.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden homogéneas

Si el término $v(t)$ de (1) es constante de valor cero, la ecuación se llama *homogénea*.

La ecuación

$$a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+bi=v$$

es una *ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden*. Si el término v es constante de valor cero,

$$a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+bi=0$$

es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden *homogénea*.

Algunas ecuaciones pueden escribirse de forma que i y su diferencial estén solo en un miembro, y el resto de las variables que dependen de t, incluida dt, solo en el otro. Esas ecuaciones diferenciales se llaman ecuaciones diferenciales ordinarias *de variables separables*. La ecuación homogénea anterior es de variables separables, pues pasando el segundo término al segundo miembro, queda

$$a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-bi$$

Y multiplicando por dt y dividiendo por ai resulta

$$\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\frac{b}{a}\mathrm{d}t$$

La variable dependiente i está solo en el primer miembro, y las demás funciones de t están solo en el segundo. Las variables están separadas y es entonces posible obtener la solución, pues basta hallar la integral de los dos miembros. Aquí solo hallaremos la solución si a y b son independientes de t. Entonces, integrando resulta

$$\ln i+k_1=-\frac{b}{a}t+k_2$$

k_1 es la constante de integración de la integral del primer miembro y k_2 la de la integral del segundo miembro. Queda

$$\ln i=-\frac{b}{a}t+k_2-k_1$$

O bien

$$\ln i-\ln K=-\frac{b}{a}t$$

Donde $\ln K=k_2-k_1$. También

$$\ln\frac{i}{K}=-\frac{b}{a}t$$

$$\frac{i}{K}=\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$$

$$i = K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t} \tag{2}$$

Esta es la solución buscada, donde K es cualquier función real independiente de t.

Que la última fórmula es solución de la ecuación diferencial se comprueba sustituyendo la solución en la ecuación diferencial:

$$a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + bi = -aK\frac{b}{a}\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t} + bK\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t} = 0$$

Se cumple la igualdad, y la (2) es solución porque satisface la ecuación diferencial.

La función (2) es la solución general de la ecuación diferencial homogénea dada. No hay ninguna solución singular: todas las soluciones particulares de la ecuación diferencial se obtienen de (2) sustituyendo K por cualquier función independiente de t y de i.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas

Si en la ecuación

$$a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + bi = v \tag{3}$$

v no es constante de valor cero, la ecuación se llama *no homogénea*. Su nombre completo sería *ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden no homogénea*. La misma ecuación con $v = 0$

$$a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + bi = 0 ,$$

es la ecuación homogénea del parágrafo anterior. Se llama *ecuación homogénea* asociada de la dada. Y la (3) se llama *ecuación completa*, para distinguirla explícitamente de su homogénea asociada.

Una forma de obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales es la siguiente:

1. Se resuelve su ecuación homogénea asociada.
2. Se busca una solución particular de la ecuación completa.
3. La solución general es la suma de la solución general de la homogénea más la solución particular.

La justificación de que la función que así obtengamos es solución de la ecuación diferencial consistirá en la comprobación de que ese resultado satisface esa ecuación diferencial. Obtendremos por este procedimiento la solución general de la ecuación (3) para a y b independientes de t y v constante[2].

La ecuación homogénea asociada es

$$a\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+bi=0$$

Su solución general, hallada en el parágrafo anterior, es

$$i=K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$$

Ahora hay que hallar una solución particular de la ecuación completa. Esa solución depende del término independiente $v(t)$. Para $v=V$, independiente del tiempo, comprobamos que hay una solución particular que es un valor constante de i, que designaremos por I. Para hallar el valor I que satisface la ecuación diferencial sustituimos I en la ecuación completa. Resulta

$$a\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+bI=V$$

O sea,

$$bI=V$$

pues I es constante, no depende de t. Por tanto

$$I=\frac{V}{b}$$

$I=V/b$ es solución particular de la ecuación completa. La solución general de la ecuación es la suma de la solución de la homogénea asociada más la solución particular hallada:

$$i=K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}+\frac{V}{b} \tag{4}$$

Puede comprobarse que (4) es solución de la ecuación diferencial viendo que la satisface.

[2] En Félix Redondo Quintela, Roberto C. Redondo Melchor. *Redes eléctricas de Kirchhoff 2ª edición*. Ed. REVIDE. Béjar, 2005, pp. 427-439, se resuelven ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden en las que v es función sinusoidal del tiempo.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas

Una ecuación diferencial lineal de *segundo orden* es una ecuación de la forma

$$a\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+ci=v$$

Donde a, b, c y v no son funciones de i, pero pueden ser funciones de la variable independiente t o independientes de ella. En el último caso se dice que son constantes.

Si v es constante de valor cero, la ecuación se llama *homogénea*:

$$a\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+ci=0 \tag{5}$$

Hallaremos la solución general de esta ecuación homogénea para el caso en que los coeficientes a, b y c son constantes.

Designaremos por D el símbolo $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. O sea,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{D}$$

Con esa notación la (5) se escribe

$$a\mathrm{D}^2 i+b\mathrm{D}i+ci=0$$

También, dividiendo por a,

$$\mathrm{D}^2 i+\frac{b}{a}\mathrm{D}i+\frac{c}{a}i=0$$

O

$$\left(\mathrm{D}^2+\frac{b}{a}\mathrm{D}+\frac{c}{a}\right)i=0 \tag{6}$$

La ecuación de segundo grado

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \tag{7}$$

se llama *ecuación característica* de la ecuación diferencial (5). Es muy fácil escribirla, pues la forma de su primer miembro es idéntica al interior del paréntesis de (6) sustituyendo D por x.

Las soluciones de (7), que se llaman también *raíces* de la ecuación de segundo grado (7), son

$$s_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$s_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Estas soluciones determinan la solución general de la ecuación diferencial (5). Pueden ser de tres tipos: *dos raíces reales distintas*; *una sola raíz real*, que se llama entonces *raíz doble*, y *dos raíces complejas conjugadas*.

El caso de dos raíces reales distintas ocurre si el discriminante es mayor que cero. O sea, si

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} > 0$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial (5) es

$$i = A_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{s_2 t}$$

A_1 y A_2 son independientes de *i* y de *t*.

Si

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0$$

la ecuación característica tiene una sola raíz, que es real. Se llama raíz doble. Su valor es

$$s_1 = s_2 = -\frac{b}{2a} = \alpha$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$i = A_1 t \mathrm{e}^{\alpha t} + A_2 \mathrm{e}^{\alpha t}$$

Por último, si

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0\,,$$

las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas de la forma

$$s_1 = \alpha + \mathrm{j}\beta$$

$$s_2 = \alpha - \mathrm{j}\beta$$

Donde j es la unidad imaginaria y

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = \left| \sqrt{\left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a}} \right|$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es, en la forma, la misma que si las dos raíces son reales distintas; aunque ahora, como s_1 y s_2 son dos números complejos, las tres ecuaciones siguientes son equivalentes, y cualquiera de las tres es solución:

$$i = A_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{s_2 t}$$

$$i = \mathrm{e}^{\alpha t} \left(K_1 \cos \beta t + K_2 \operatorname{sen} \beta t \right)$$

$$i = K \mathrm{e}^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \theta)$$

A_1, A_2, K_1, K_2, K y θ son constantes.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas

La ecuación

$$a \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + b \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ci = v \,, \tag{8}$$

donde v no es constante de valor cero, es una ecuación diferencial lineal de segundo orden *no homogénea*. Su solución se obtiene hallando primero la solución de su ecuación homogénea asociada

$$a \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + b \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ci = 0$$

de la forma que se mostró en el parágrafo anterior. Después hay que encontrar una solución particular de la ecuación completa (8). La suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y la solución particular es la solución general de la ecuación diferencial (8).

Si v es constante[3] de valor V, se verá que hay una solución particular constante I. Para hallar su valor sustituimos I en (8) con $v = V$ y resulta

$$cI = V$$

O sea,

$$I = \frac{V}{c}$$

satisface la ecuación diferencial si $v = V$, si v es constante. Por tanto $I = V/c$ es una solución particular. Así que, si las raíces de la ecuación característica son distintas (reales o complejas) la solución general de (8) es

$$i = A_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{s_2 t} + \frac{V}{c}$$

Y si la ecuación característica tiene una raíz doble, la solución completa es

$$i = A_1 t \mathrm{e}^{\alpha t} + A_2 \mathrm{e}^{\alpha t} + \frac{V}{c}$$

Final

Los conceptos generales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y la solución de las ecuaciones lineales de primer orden y de segundo orden contenidos en este artículo son útiles directamente; pero también pueden servir de base para comprender las soluciones de otras ecuaciones diferenciales y de sistemas de ellas. En cualquier caso, para no pocos objetivos basta recordar lo aquí expuesto. Y también tener presente que las soluciones de la mayor parte de las ecuaciones diferenciales que aparecen en la ciencia y en la ingeniería, y de los sistemas de esas ecuaciones pueden obtenerse por medio de programas adecuados[4].

[3] En Félix Redondo Quintela, Roberto C. Redondo Melchor. *Redes eléctricas de Kirchhoff 2ª edición*. Ed. REVIDE. Béjar, 2005, pp. 439-444, se resuelven ecuaciones difeenciales ordinarias lineales de segundo orden en las que *v* es función sinusoidal del tiempo.

[4] Por ejemplo, *Mathematica*.

