2. Dieléctricos

Félix Redondo Quintela y Roberto C. Redondo Melchor
Universidad de Salamanca

Introducción

En el capítulo primero se ha estudiado el campo eléctrico en el vacío. A partir de esta lección se comienza su estudio en cuerpos. Comenzaremos creando el concepto de dipolo, que servirá para describir una clase de cuerpos llamados dieléctricos.

Dipolo eléctrico

Definición.- *Dipolo eléctrico es cada conjunto de dos cargas puntuales opuestas separadas*.

$$\underset{-q}{\circ}\xrightarrow{\quad d \quad}\underset{q}{\circ}$$

Fig. 1.- Dipolo eléctrico

Brazo de un dipolo es el vector $\boldsymbol{d}$ *de origen el punto que ocupa* $-q$ *y extremo el que ocupa* q. El vector

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

se llama *momento del dipolo* o *momento dipolar*. Se ve que su unidad es C m (culombio metro).

Dipolo puntual

Con origen de potenciales en el infinito, el potencial que un dipolo crea en un punto P es (Fig. 2)

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

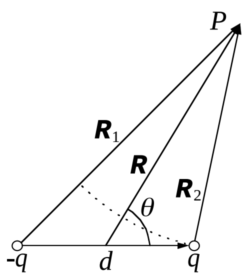

Fig. 2.- Dipolo puntual es el dipolo en el que R es mucho mayor que d.

Si el módulo d del brazo del dipolo es despreciable frente a los módulos de $\boldsymbol{R}_1$ y $\boldsymbol{R}_2$, la diferencia $R_1 - R_2$ de la fórmula anterior es aproximadamente la proyección de d sobre $\boldsymbol{R}_1$. Y como $\boldsymbol{R}_1$ tiende entonces a $\boldsymbol{R}$ resulta

$$R_1 - R_2 \simeq d\cos\theta = \boldsymbol{d}\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

Se ha utilizado que la proyección de un vector sobre la dirección de otro, $\boldsymbol{d}$ sobre $\boldsymbol{R}$ en este caso, es el producto escalar de $\boldsymbol{d}$ por el vector unitario $\boldsymbol{R}/R$ en la dirección de $\boldsymbol{R}$[1]. Sustituyendo en la fórmula del potencial queda:

$$V \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{R^2} = \frac{q\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (1)$$

Se ha utilizado que $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ y que $\boldsymbol{R}/R^3 = -\nabla(1/R)$.

Un dipolo en el que se hace esa aproximación se llama *dipolo puntual*. $\boldsymbol{R}$ es entonces el vector con origen en el dipolo y extremo en el punto (x, y, z) en que se halla el potencial[2].

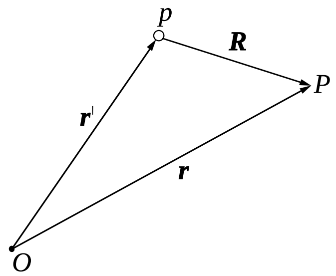

Fig. 3.- Dipolo puntual en el punto $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$.

Si (x', y', z') son las coordenadas del punto que ocupa el dipolo (Fig. 3), entonces

$$\boldsymbol{R} = (x - x')\boldsymbol{i} + (y - y')\boldsymbol{j} + (z - z')\boldsymbol{k}$$

por lo que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

es función de x, y, z, x', y', z'. El gradiente de $1/R$, que hemos escrito $\nabla(1/R)$, es el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de $1/R$ respecto a las variables

---

1 Un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{R}$ es el cociente entre el vector $\boldsymbol{R}$ y su módulo R.

2 El origen de $\boldsymbol{R}$ puede ser el centro del brazo del dipolo. Así se ha dibujado en la figura. Pero también podría ser, por ejemplo, un extremo, pues la diferencia no influye en los problemas macroscópicos. Esto es, precisamente, lo que significa 'dipolo puntual': que la longitud de su brazo es despreciable comparada con las longitudes que se consideran en los problemas, de forma que se puede hablar del 'punto que ocupa el dipolo'.

x, y, z. La expresión $\nabla'(1/R)$ significa hallar el gradiente de $1/R$ respecto a las variables son x', y', z'. Si se hallan los dos gradientes se ve que

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$$

con lo que

$$V\simeq\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \tag{2}$$

Esta será la fórmula del potencial de un dipolo que utilizaremos en lo que sigue.

Conductores y dieléctricos

Sea v el volumen limitado por la superficie cerrada S. Si la posición de una partícula en v no cambia respecto a la superficie S, se llama *partícula fija* o *partícula ligada*. Si $v'\subset v$, y una partícula no puede abandonar el volumen v', se llama *partícula confinada* en v', y v' se llama *volumen de confinamiento* de esa partícula. Una partícula cuyo volumen de confinamiento es todo v, se llama *partícula libre* en el volumen v, pues se puede mover por todo v.

Una partícula fija con carga se llama *carga fija* o *carga ligada*; y una partícula libre con carga se llama *carga libre*.

Cada átomo de un sólido vibra confinado en un pequeño volumen del sólido. Pero, como ese volumen suele ser pequeño comparado con el volumen total del sólido, los átomos de los sólidos se consideran partículas fijas.

Entre los átomos de los cuerpos hay grandes espacios vacíos. El vacío entre las estrellas es imagen del vacío entre los átomos. De forma parecida a como alrededor de cada estrella giran sus planetas, alrededor del núcleo de cada átomo giran sus electrones[3]. Pero, aumentando su energía, algunos electrones de la última capa pueden abandonar el átomo al que pertenecen y convertirse en electrones libres, que vagan en el vacío que existe entre los átomos como algunos cuerpos celestes se mueven por el espacio, sin permanecer girando alrededor de ninguna estrella[4]. En los

---

[3] Esta imagen pretende llamar la atención sobre lo "esencialmente vacíos" que están los cuerpos. Por ejemplo, los centros de dos núcleos de muchos átomos adyacentes de cobre sólido distan 0.36×10^{-9} m, una distancia que es más de 36×10^{3} veces el diámetro de cada núcleo, que es del orden de 10^{-14} m. Dicho de otra manera, entre dos de esos núcleos cabrían 36000 núcleos de cobre colocados en línea recta. Hay pares de estrellas entre las que caben solo 5000 estrellas en línea recta.

[4] Los electrones libres se mueven en el espacio vacío que existe entre las órbitas más externas de átomos contiguos. Los electrones que giran en la última órbita se llaman *electrones de valencia*. La imagen cósmica sigue siendo útil para representar también el paso de un electrón de valencia a electrón libre: si a Plutón se le comunica energía por medio de un cohete que lo empuje hacia fuera, puede abandonar su órbita alrededor del sol y vagar por el espacio como cuerpo libre. Esto también podría ocurrirle a un planeta más interno, por ejemplo a la Tierra; pero entonces la energía necesaria sería mayor. Por eso es más fácil liberar a los cuerpos más alejado del Sol. Lo mismo ocurre

metales ya ocurre eso sin aporte de energía, pues a cualquier temperatura tienen electrones libres.

Todas las moléculas de los líquidos y gases, y los iones que pueda haber entre ellas son partículas libres, pues se mueven por todo el volumen del fluido. Como los iones tienen carga, son cargas libres. Por ejemplo, en una disolución acuosa de una sal, de un ácido o de una base hay iones positivos y negativos, que son cargas libres. En la atmósfera, junto a las moléculas neutras de oxígeno, nitrógeno, etc. hay iones de estos y otros cuerpos originados por los rayos cósmicos[5], por tormentas o por otras causas. Esos iones son cargas libres.

Definición.- *Conductor es un volumen con cargas libres.* Un sólido y un líquido con cargas libres son conductores. Los metales son conductores.

Definición.- *Aislantes son volúmenes sin cargas libres.* El vacío es, por tanto, aislante. Los cuerpos que mantengan todos los electrones ligados a sus átomos son aislantes. Sin embargo, a temperatura superior al cero absoluto hay electrones libres en todos los cuerpos. Cuanto menor sea su concentración más parece el cuerpo un aislante. Por eso, en la práctica, se habla de buenos o malos conductores y de buenos o malos aislantes. Los metales son buenos conductores, pues tienen muchos electrones libres. El cobre y el aluminio son los más usados como conductores. El vidrio, la mica y ciertos plásticos se encuentran entre los mejores aislantes. Los cuerpos aislantes se llaman dieléctricos.

Dieléctricos como distribuciones de dipolos. Polarización

Los dieléctricos son conjuntos de moléculas. Cada molécula tiene cargas positivas y negativas, que suman cero. Por eso las moléculas se pueden imaginar como conjuntos de pares de cargas puntuales opuestas separadas por pequeñas distancias. Es decir, describiremos cada molécula por un conjunto de dipolos. Esa será nuestra hipótesis de partida para estudiar los dieléctricos: que cada una de sus moléculas es un conjunto de dipolos. La suma vectorial de los momentos dipolares de todos los dipolos de una molécula se llama *momento dipolar de esa molécula*. Las moléculas cuyo momento dipolar no es cero se llaman moléculas *polares*. Si el momento dipolar es cero se llaman moléculas *apolares* o *no polares*. Las moléculas de agua son polares. Las de dióxido de carbono *apolares*. Como la distancia entre las cargas de los dipolos de las moléculas es microscópica, pueden considerarse dipolos puntuales si las distancias que se consideran son mucho mayores que los brazos de los dipolos moleculares. Por tanto, desde el punto de vista electrostático, un dieléctrico puede describirse por un conjunto de dipolos puntuales en el volumen del dieléctrico,

con los electrones: los primeros que se liberan y los únicos en la conducción eléctrica ordinaria son algunos de los de valencia, los más externos.

[5] Se llaman *rayos cósmicos* las partículas subatómicas que proceden de fuera de la atmósfera, del espacio exterior, del *cosmos*.

lo que llamaremos *distribución volúmica de dipolos puntuales*[6]. *La suma de los momentos dipolares de los dipolos contenidos en un volumen se llama momento dipolar de ese volumen*.

Definición.- Sea una distribución volúmica de dipolos puntuales en un volumen v. *Polarización es una función vectorial* $\boldsymbol{P}$ *definida en* v *tal que el momento dipolar* $\boldsymbol{p}'$ *de cada volumen* v' *contenido en* v *es*

$$\boldsymbol{p}' = \int_{v'} \boldsymbol{P}\,\mathrm{d}v'$$

Si existe, coincide en cada punto con

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta v}$$

donde el volumen Δv contiene a ese punto e $\nabla \boldsymbol{p}$ es el momento dipolar del volumen Δv. Es decir, $\boldsymbol{P}$ es la *densidad de momento dipolar* en cada punto, o sea, el *momento dipolar por unidad de volumen* en cada punto. Se ve que la unidad de $\boldsymbol{P}$ en el Sistema Internacional de Unidades es el $\mathrm{C\,m/m^3 = C/m^2}$ (culombio por metro cuadrado), la de una densidad superficial de carga. Si $\boldsymbol{P}$ es una función continua de x', y', z', la distribución se llama distribución continua de dipolos puntuales. *Polarización de un dieléctrico es la polarización de la distribución de sus dipolos moleculares.*

Campo creado por una distribución de dipolos puntuales

Sea $\boldsymbol{P}$ la polarización de una distribución de dipolos puntuales. Si una parte $\mathrm{d}v$ de su volumen es pequeña, puede considerarse aproximadamente un dipolo puntual de momento dipolar

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}\,\mathrm{d}v$$

Según la fórmula (2), ese dipolo crea un potencial en un punto

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \boldsymbol{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R}\right) \mathrm{d}v$$

$\boldsymbol{R}$ es el vector que va desde cada $\mathrm{d}v$ al punto en el que se quiere hallar el potencial. El potencial que toda la distribución crea en el punto considerado se obtiene integrando en todo el volumen de la distribución de dipolos puntuales:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \boldsymbol{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R}\right) \mathrm{d}v$$

De la identidad

[6] A partir de aquí se comienza a elaborar la teoría de las distribuciones de dipolos puntuales, que es una parte de la Electrostática, pues se sigue utilizando como único axioma la ley de Coulomb, y el trabajo seguirá siendo puramente matemático. Lo que se deduzca será válido para una distribución volúmica de dipolos puntuales, y aplicable a los dieléctricos en la medida en que estos se aproximen a tal distribución. El comportamiento observado de muchos dieléctricos coincide con los resultados de la teoría.

$$\nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \boldsymbol{P} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \cdot \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

se obtiene

$$\boldsymbol{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \boldsymbol{P} \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \boldsymbol{P}$$

Sustituyendo en la fórmula del potencial,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \boldsymbol{P} \right) \mathrm{d}v - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{1}{R} \nabla' \cdot \boldsymbol{P} \, \mathrm{d}v$$

Por el teorema de Gauss o de la divergencia,

$$\int_v \nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \boldsymbol{P} \right) \mathrm{d}v = \oint_{\boldsymbol{S}} \frac{1}{R} \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

S es la superficie límite del volumen v. Sustituyendo y ordenando,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{-\nabla' \cdot \boldsymbol{P}}{R} \mathrm{d}v + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\boldsymbol{S}} \frac{1}{R} \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Si hacemos $\rho_p = -\nabla' \cdot \boldsymbol{P}$ y $\sigma_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}$, donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección y sentido del d$\boldsymbol{S}$, es decir, normal a la superficie, queda:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{\rho_p}{R} \mathrm{d}v + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\boldsymbol{S}} \frac{\sigma_p}{R} \mathrm{d}S$$

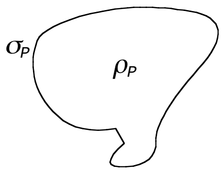

Fig. 4.- Un dieléctrico equivale a dos distribuciones simultáneas de carga: una volúmica y otra superficial.

A la última fórmula puede dársele una interpretación muy ingeniosa: resulta que el potencial que una distribución de dipolos puntuales crea en un punto es el mismo que si la distribución fuera una distribución volúmica de carga de densidad $\rho_p = -\nabla' \cdot \boldsymbol{P}$ y además tuviera en su superficie límite una densidad superficial de carga $\sigma_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}$[7]. Esto significa que, para todos los efectos electrostáticos, cada

[7] Considerar a $\nabla i \boldsymbol{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$ una densidad volúmica de carga no es tan artificial, pues su unidad es $\mathrm{C/m^3}$, la de una densidad volúmica de carga. (Recuérdese que la unidad de polarización es $\mathrm{C/m^2}$). P_x, P_y, P_z son las componentes de $\boldsymbol{P}$. Es decir, $\boldsymbol{P} = P_x \boldsymbol{i} + P_y \boldsymbol{j} + P_z \boldsymbol{k}$. De la misma forma, la unidad de $\boldsymbol{P} i \boldsymbol{n}$ es $\mathrm{C/m^2}$, la de una densidad superficial de carga, pues es la componente de $\boldsymbol{P}$ perpendicular a la superficie que limita el volumen de la distribución de dipolos puntuales. (También,

distribución volúmica de dipolos puntuales equivale a una distribución volúmica de carga con densidad ρ_p, con su superficie límite cargada con densidad superficial de carga $\sigma_{\boldsymbol{p}}$. $\rho_p = -\nabla' \cdot \boldsymbol{P}$ se llama *densidad volúmica de carga de polarización*, y $\sigma_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}$ *densidad superficial de carga de polarización*. Por tanto el campo eléctrico que un dieléctrico o una distribución de dipolos puntuales crea en un punto vale

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho_p \mathrm{d}v}{R^3}\boldsymbol{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\boldsymbol{S}} \frac{\sigma_p \mathrm{d}S}{R^3}\boldsymbol{R}$$

Si la polarización $\boldsymbol{P}$ es nula, las densidades volúmica y superficial de carga de polarización también lo son, y el campo que crea el dieléctrico es cero. Aunque el dieléctrico sea polar, la polarización puede ser nula en todos sus puntos; basta que los dipolos estén orientados de forma que la suma de sus momentos en cualquier volumen sea cero. Este es el estado habitual de la mayor parte de los dieléctricos, tanto de los polares como de los no polares: que su polarización es cero en todos sus puntos. Pero si la polarización no es cero, la distribución equivale a dos distribuciones de carga de densidades ρ_P en el volumen de la distribución y σ_P en la superficie que la limita. Si en la distribución hay otras cargas, la densidad que ha de considerarse en cada punto a todos los efectos electrostáticos es la total $\rho_t = \rho + \rho_p$, donde ρ es la densidad volúmica de cualquier otra carga distinta de la de polarización. Lo mismo si hay otras cargas en la superficie: $\sigma_t = \sigma + \sigma_p$. Si no se ha incorporado carga adicional la carga total del volumen de la distribución de dipolos es cero, pues la carga positiva de cada dipolo es igual a la negativa.

Carga latente de polarización

Definición.- *Se llama carga volúmica de polarización de una distribución de dipolos puntuales a*

$$q_{Pv} = \int_v \rho_p \mathrm{d}v$$

donde v es el volumen de la distribución. Se llama *carga superficial de polarización de una distribución de dipolos puntuales a*

$$q_{PS} = \oint_S \sigma_p \, \mathrm{d}S$$

donde S es la superficie cerrada que limita a v.

Ambas cargas son las que tendría la distribución de carga que crearía en cada punto el mismo campo eléctrico que crea la distribución de dipolos o el dieléctrico al que describe (fig. 4). Se llaman también *cargas latentes de polarización*. La suma de las dos,

$$q_P = q_{Pv} + q_{PS}$$

si un vector unitario se define como $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{V}/|\boldsymbol{V}|$, su dimensión es la unidad. O sea, un vector unitario no tiene unidades).

se llama *carga total de polarización* o *carga latente total de polarización*.

Teorema.- *La carga latente total de polarización de una distribución de dipolos puntuales es cero.*

Demostración.-

$$q_P = q_{Pv} + q_{PS} = \int_v \rho_p \mathrm{d}v + \oint_S \sigma_p \mathrm{d}S = \int_v \left(-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\right)\mathrm{d}v + \oint_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S =$$

$$= -\int_v \mathrm{div}\boldsymbol{P}\,\mathrm{d}v + \int_v \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\,\mathrm{d}v = 0$$

Se ha aplicado el teorema de la divergencia, según el cual

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_v \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\,\mathrm{d}v$$

v es el volumen de la distribución y S la superficie que lo limita. El resultado es interesante, pues muestra que el campo creado por un dieléctrico polarizado sin carga adicional se debe a una redistribución de su carga, que equivale a densidades de carga en cada punto no nulas, aunque la carga total es siempre cero.

Ley de Gauss para dieléctricos

Una vez establecida la equivalencia entre un dieléctrico o distribución de dipolos y una distribución de carga, pueden aplicarse al dieléctrico las propiedades ya conocidas. Solo hay que recordar que la densidad de carga en cada punto de un dieléctrico o de una distribución de dipolos puntuales debe incluir, además de otras posibles, la carga de polarización. Entonces, si el campo $\boldsymbol{E}$ en cada punto de un dieléctrico está creado solo por cargas eléctricas, incluidas las de polarización, la ley de Gauss para cada punto de un dieléctrico se escribe

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} = \frac{\rho+\rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho-\nabla\cdot\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

ρ_p es la densidad volúmica da carga de polarización y ρ la densidad de carga debida a otras cargas añadidas distintas de las de los dipolos. Llamaremos a ρ *densidad volúmica de carga adicional*. $\rho_t = \rho + \rho_p$ es la *densidad volúmica de carga total*. De (2),

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\right) = \rho$$

El vector

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

se llama *vector desplazamiento eléctrico* o, simplemente, *vector desplazamiento*. Tiene la misma unidad que $\boldsymbol{P}$: C/m^2, la de densidad superficial de carga. Resulta

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \qquad (3)$$

que es una forma muy sencilla de la ley de Gauss, válida con independencia de si el medio es material o es el vacío. En este último caso, como en el vacío no hay moléculas polarizadas ni no polarizadas, la polarización $\boldsymbol{P}$ vale cero, con lo que

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

y

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

o

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

que es la relación encontrada para el vacío. Nótese, por tanto, que (3) y (4) son equivalentes. No es que la ley de Gauss para los dieléctricos añada algo que la misma ley para el vacío no contuviera, ya que se ha deducido de la ley para el vacío. Y, recíprocamente, de la ley de Gauss para los dieléctricos acabamos de deducir la ley para el vacío. Como a su vez la ley de Gauss para el vacío es equivalente a la ley de Coulomb, resulta que también la ley de Gauss para los dieléctricos es equivalente a la ley de Coulomb: cualquiera de las tres puede tomarse como axioma, como punto de partida para construir la Electrostática.

A las mismas relaciones se habría llegado a partir de la forma integral de la ley de Gauss en el vacío. En efecto, en cualquier superficie cerrada S de un dieléctrico

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q_t}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \left(\rho + \rho_p\right) \mathrm{d}v = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho \, \mathrm{d}v - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \nabla \cdot \boldsymbol{P} \, \mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho \, \mathrm{d}v - \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

El volumen v en el que se calcula la integral es el limitado por la superficie cerrada. Se ha utilizado el teorema de la divergencia. Comparando el primer miembro y el último se obtiene:

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_v \rho \, \mathrm{d}v = q$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

es el desplazamiento y q la carga distinta de la carga de polarización en el volumen considerado. Resulta:

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_v \rho \, \mathrm{d}v = q$$

que es la ley de Gauss en forma integral: *el flujo de **D** a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga adicional que haya en el volumen limitado por esa superficie*. Nótese en la anterior igualdad que el flujo del vector desplazamiento a través de una superficie tiene dimensión de carga eléctrica, o sea, se mide en C.

Susceptibilidad eléctrica y constante dieléctrica

Lo habitual es que la polarización de los dieléctricos sea cero, incluso en los dieléctricos cuyas moléculas son polares, que se llaman dieléctricos polares, pues, en ellos, los momentos dipolares de las moléculas suelen estar orientados al azar, de forma que la suma de los momentos dipolares de cada volumen macroscópico de dieléctrico es cero.

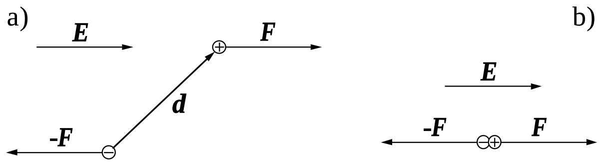

Fig. 5.- a) Un campo eléctrico tiende a colocar el brazo de los dipolos de las moléculas polares en la dirección y sentido del campo eléctrico. b) En las moléculas apolares el campo eléctrico tiende a separar las cargas positivas de las negativas y a originar así un momento dipolar no nulo en cada una.

Pero cuando existe un campo eléctrico en un dieléctrico, ejerce fuerzas en las cargas de sus moléculas. Si el dieléctrico es polar, estas fuerzas tienden a orientar los dipolos de sus moléculas en la dirección del campo, es decir, a poner paralelos los momentos dipolares con el campo (Fig. 5a). También tienden a aumentar la separación de las cargas positivas de las negativas. Si el dieléctrico es apolar, el campo tiende a separar las cargas y a originar en cada molécula un momento dipolar no nulo (fig. 5b). Estas acciones aumentan los momentos dipolares de las moléculas. En muchos dieléctricos solo así se consigue una polarización no nula: por aplicación de campo eléctrico. Y en muchos de ellos, a los que llamaremos dieléctricos *isótropos*, esa polarización tiene siempre la dirección y el sentido del campo eléctrico en cada punto. En esos casos la relación entre la polarización y el campo eléctrico en cada punto se expresa así:

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$$

χ se llama *susceptibilidad eléctrica* del material, y es número real positivo adimensional[8]. Cuanto mayor sea χ mayor polarización se consigue con el mismo campo eléctrico. Por tanto χ es una característica de cada dieléctrico isótropo, y mide lo *susceptible* que es de ser polarizado. $\chi = 0$ significa que el dieléctrico es impolarizable. El vacío es impolarizable, pues no hay moléculas que polarizar. Si χ no depende del módulo del campo eléctrico se dice del dieléctrico que es *lineal*. En caso contrario se dice que es *no lineal*. Muchos materiales útiles se comportan aproximadamente como dieléctricos isótropos. Llevando la última fórmula a la definición de $\boldsymbol{D}$, en ellos se cumple que

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (1+\chi) \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

---

[8] La fórmula $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$ con χ positiva es una manera de expresar que la polarización tiene la misma dirección y sentido que el campo. Los dieléctricos en los que eso ocurre se llaman dieléctricos *isótropos*, de cuya teoría esa fórmula es el punto de partida. En la medida en que los dieléctricos reales la cumplan, tienen las propiedades que se deduzcan de esa teoría. Que $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{E}$ tengan la misma dirección podía haberse expresado así: $\boldsymbol{P}=s\boldsymbol{E}$, con un solo coeficiente de $\boldsymbol{E}$. Se prefiere hacer $s = \varepsilon_0 \chi$ porque así χ resulta adimensional.

$$\varepsilon_r = 1 + \chi \tag{5}$$

Se llama *constante dieléctrica* o *coeficiente dieléctrico* del material, y es siempre un número real mayor o igual que 1, pues $\chi \geq 0$.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

es un número real también positivo igual o mayor que ε_0, que se llama *permitividad* del material, y tiene las mismas dimensiones que ε_0. Como

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

ε_r se llama también *permitividad relativa* del material respecto al vacío[9]. De (5) se deduce que si $\varepsilon_r = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, y $\chi = 0$, con lo que la polarización del dieléctrico es nula aunque exista campo eléctrico. Para el vacío $\varepsilon_r = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ y $\chi = 0$. También para el aire.

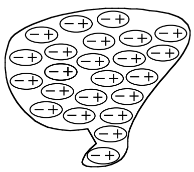

Fig. 6.- Un campo eléctrico tiende a orientar los momentos dipolares de las moléculas de los materiales isótropos en la dirección y sentido del campo.

Sin embargo no en todos los dieléctricos la relación entre el campo eléctrico y la polarización es $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$. En algunos de ellos, aunque el campo eléctrico se anule, la polarización sigue siendo distinta de cero. El valor de la polarización cuando el campo eléctrico es nulo se llama entonces *polarización remanente*[10]. Los materiales en que esto ocurre se llaman *materiales ferroeléctricos*, y la propiedad de que haya polarización aunque no haya campo eléctrico que la cree se llama *ferroelectricidad*. El prefijo 'ferro' no se debe a ninguna relación de estos materiales con el hierro, sino por la semejanza de este fenómeno con el *ferromagnetismo*, que sí tiene que ver con el hierro: en los materiales ferromagnéticos queda una inducción magnética $\boldsymbol{B}$ no nula aunque se anule la intensidad del campo $\boldsymbol{H}$ que la crea. Este valor de $\boldsymbol{B}$ se llama *inducción remanente* o magnetismo remanente, y la propiedad que consiste en que haya inducción magnética $\boldsymbol{B}$ aunque no haya intensidad de campo $\boldsymbol{H}$ que la cree, se llama *ferromagnetismo* porque esta propiedad la tienen los elementos del grupo del hierro y aleaciones hechas con ellos. Esta semejanza de comportamiento es la que ha dado lugar al nombre *materiales ferroeléctricos* para calificar a los materiales en los que puede existir polarización remanente.

En otros dieléctricos la polarización no tiene necesariamente la dirección del campo eléctrico. Son los dieléctricos anisótropos. En algunos de ellos la relación entre el campo y la polarización puede expresarse por medio de la fórmula tensorial:

---

9 El valor de ε_r es solo de algunas unidades. Para la mica, por ejemplo, es próximo a 6.

10 *Remanente* significa *lo que queda de algo*.

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_i^j E_j$$

que da para componente del vector desplazamiento

$$D_i = \varepsilon_i^j E_j$$

La anisotropía se presenta principalmente en materiales cristalinos. Aquí solo nos ocuparemos de los dieléctricos isótropos.

Rigidez dieléctrica

Si el campo que se aplica a un aislante es suficientemente elevado, puede arrancar electrones de sus moléculas, ionizándolas, y originando cargas libres que hacen perder al material sus propiedades de aislante. *El mayor módulo de campo eléctrico que se puede aplicar a un aislante sin que ionice sus moléculas se llama rigidez dieléctrica del aislante*, y *los campos eléctricos de módulo superior a la rigidez dieléctrica de un aislante se llaman campos eléctricos ionizantes* para ese aislante. Los de módulo menor se llaman *campos eléctricos no ionizantes*. Los campos eléctricos que polarizan un dieléctrico han de ser no ionizantes, o sea, de módulos menores que la rigidez dieléctrica del dieléctrico, única forma de que polarice sus moléculas sin ionizarlas.

La rigidez dieléctrica de los aislantes depende de diversas variables, como de su humedad y de su temperatura. La rigidez dieléctrica del aire es próxima a 30 kV/cm.

Ley de Coulomb en dieléctricos

Puede obtenerse una expresión de la ley de Coulomb para cargas puntuales situadas en dieléctricos isótropos. En efecto, si una sola carga puntual q está situada en un dieléctrico, aplicando la ley de Gauss a una superficie esférica de radio R y centro en la carga, como, por simetría, $\boldsymbol{D}$ es perpendicular a la superficie esférica, se tiene:

$$4\pi R^2 D = q$$

$$D = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{R^2}$$

Y como $D = \varepsilon E$,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{R^2}$$

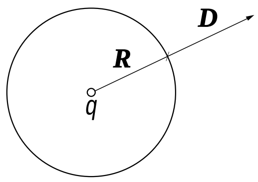

Fig. 7.- Campo de una carga en un medio dieléctrico.

Es decir, la fórmula del campo que crea una carga puntual situada en un dieléctrico es la misma que en el vacío excepto que la permitividad es la del dieléctrico. Por tanto la fuerza entre dos cargas puntuales situadas en un dieléctrico es

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{R_{12}^3}\boldsymbol{R}_{12} \qquad (6)$$

que es la ley de Coulomb en medios dieléctricos, que incluye la ley de Coulomb en el vacío, pues en el vacío $\varepsilon = \varepsilon_0$. De nuevo hay que decir que ambas leyes, la del vacío y la de los dieléctricos son equivalentes, pues de una se obtiene la otra. Pero la fórmula (6) tiene un valor práctico considerable, pues indica que las fórmulas para un medio dieléctrico isótropo son las mismas que para el vacío, excepto que hay que sustituir en todas la permitividad del vacío por la del medio. Nótese que la permitividad ε del dieléctrico resume todo el efecto de la fuerza que las cargas latentes de polarización ejercen sobre las cargas puntuales.

La (6) también puede escribirse así:

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R_{12}^3}\boldsymbol{R}_{12} = \frac{k_0}{\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{R_{12}^3}\boldsymbol{R}_{12} = \frac{\boldsymbol{F}_{120}}{\varepsilon_r}$$

Que muestra que la fuerza entre dos cargas puntuales en un medio dieléctrico es la del vacío dividida por ε_r. Como la permitividad relativa ε_r es mayor o igual que uno en todos los dieléctricos isótropos, resulta que la fuerza entre dos cargas puntuales situadas en medios dieléctricos isótropos es siempre menor o igual que en el vacío. $\boldsymbol{F}_{120}$ es la fuerza en el vacío. Por tanto, también el campo eléctrico es menor o igual en un punto si el medio es un dieléctrico que si es el vacío.

De (6) se deduce que, si el medio sin límites en el que se producen las acciones entre cargas es un dieléctrico isótropo, lineal y homogéneo, las fórmulas deducidas para el vacío son válidas en el dieléctrico si en los lugares donde aparece escrito ε_0 se escribe ε, que es la permitividad del dieléctrico[11].

Condiciones en las fronteras

Definición.- *La superficie de separación entre dos medios homogéneos se llama frontera.*

Averiguaremos cómo varía el campo electrostático al pasar de una parte a otra de la frontera entre dos dieléctricos de permitividades respectivas ε_1 y ε_2. Para ello suponemos una superficie cerrada cilíndrica con dos bases de igual área, dS, una a cada lado de la frontera, paralelas a ella e infinitamente próximas entre sí (fig. 8a).

[11] Los adjetivos *aislante* y *dieléctrico* aplicados a los cuerpos o materiales se consideran a veces sinónimos. Pero, en la práctica, aunque se trate del mismo material, se utiliza el nombre *aislante* cuando la propiedad que interesa es la de aislamiento, o sea, impedir el paso de carga a través de él; así, los hilos conductores se recubren con plásticos o barnices *aislantes*. Y se emplea *dieléctrico* cuando las propiedades que interesan son las que derivan de la polarización. Además, el vacío es aislante y no es dieléctrico.

Aplicando a esa superficie cerrada la ley de Gauss, y puesto que, por su dimensión nula, el flujo a través de la superficie lateral es cero, se tiene:

$$\boldsymbol{D}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{D}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{D}_1 \cdot \mathrm{d}S\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{D}_2 \cdot \mathrm{d}S\boldsymbol{n}_2 = \sigma\,\mathrm{d}S$$

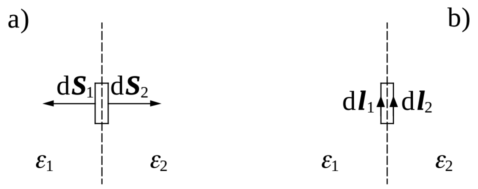

Fig. 8.- Fenómenos de frontera.

σ es la densidad de carga adicional (no de polarización) en la frontera. Si es $\boldsymbol{n}$ el vector unitario normal a la frontera que va del medio 1 al 2,

$$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}$$

Sustituyendo y simplificando,

$$\left(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1\right) \cdot \boldsymbol{n} = \sigma$$

O bien

$$\left(\varepsilon_2 \boldsymbol{E}_2 - \varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1\right) \cdot \boldsymbol{n} = \sigma$$

Y

$$\left(-\varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} + \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) = \sigma$$

Consideremos ahora una línea cerrada formada por dos segmentos de igual longitud, dl, paralelos entre sí y a la frontera, uno a cada lado de ella e infinitamente próximos (fig. 8b). La circulación de $\boldsymbol{E}$ en esa línea vale

$$\boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

Es decir,

$$E_{1t} = E_{2t}$$

En resumen, para el campo eléctrico

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad \varepsilon_2 \mathrm{E}_{2n} - \varepsilon_1 \mathrm{E}_{1n} = \sigma \tag{7}$$

O sea, *la componente tangencial del campo electrostático es siempre una función continua de las coordenadas del espacio x, y, z,* y también es continua, por tanto, la derivada parcial del potencial en esa dirección $\partial V / \partial t = E_t$. Sin embargo, la componente normal no es en general continua en la superficie de separación, como muestra (7). Tampoco lo es, por tanto, la derivada del potencial en la dirección normal, o sea, la componente normal de campo electrostático; pues, incluso si no existe carga adicional en la superficie de separación, o sea, si $\sigma = 0$,

$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{1n}$$

que muestra que, si no hay más carga superficial que la de polarización, *la componente normal del campo eléctrico es mayor en la parte de la frontera con menor coeficiente dieléctrico.* Como la componente tangencial es continua, el módulo del campo crece en la parte de menor permitividad debido al crecimiento de la componente normal. Eso hace que la dirección del campo se acerque a la normal en la frontera al pasar hacia el dieléctrico de menor permitividad, pues

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{E_t}{E_{n1}} > \frac{E_t}{E_{n2}} = \operatorname{tg}\alpha_2$$

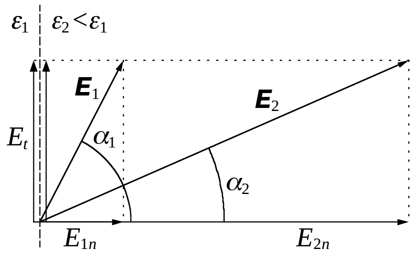

Fig. 9.- Refracción de las líneas de fuerza del campo electrostático.

El cambio de dirección del campo electrostático en la frontera entre dos medios se llama refracción de las líneas de fuerza del campo electrostático, por semejanza con el cambio de dirección de la luz y, en general, de las ondas.

Como de (7)

$$E_{2n} = \frac{\sigma + \varepsilon_1 E_{1n}}{\varepsilon_2},$$

si el campo eléctrico en un punto próximo a una parte de la frontera tal como la 1 es cero y $\sigma = 0$, también el campo es cero en un punto próximo de la otra parte. Pero si $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{0}$ y $\sigma \neq 0$, el campo en un punto de la otra parte próximo a la frontera es perpendicular a la frontera y vale

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

El potencial es siempre una función continua de las coordenadas del espacio *x*, *y*, *z*, pues es siempre derivable respecto a esas variables, ya que esas derivadas parciales son las componentes del campo electrostático, que existe en todos los puntos, aunque sea cero.

Problemas

1.- Una carga puntual $q = 3\ \mu\mathrm{C}$ está en el centro *O* de un hueco esférico vacío de 2 cm de radio practicado concéntricamente en una esfera de dieléctrico de 10 cm de radio y de coeficiente dieléctrico $\varepsilon_r = 4$. Hallar el campo electrostático en puntos que disten 1, 9 y 15 cm del centro.

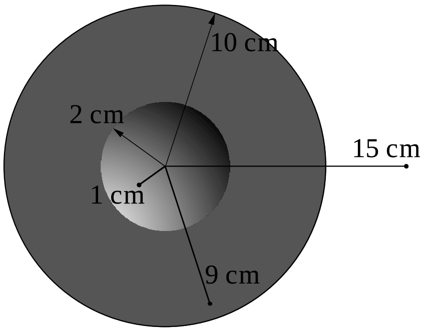

Fig. 1

Solución:

Por simetría el campo y el desplazamiento tienen la dirección del radio. El flujo de ***D*** a través de una superficie esférica de centro ***O*** y radio 1 cm es (ley de Gauss)

$$4\pi r_1^2 D(1) = q$$

De donde

$$D(1) = \frac{q}{4\pi r_1^2}$$

$$E(1) = \frac{D(1)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2} \simeq 8.9875\times 10^9 \frac{3\times 10^{-6}}{(1\times 10^{-2})^2} \simeq$$

$$\simeq 2.69625\times 10^8 \text{ N / C} = 269.625 \text{ MN / C}$$

Para una superficie esférica de centro ***O*** y radio 9 cm, que está en el dieléctrico,

$$4\pi r_9^2 D(9) = q$$

$$D(9) = \frac{q}{4\pi r_9^2}$$

$$E(9) = \frac{D(9)}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_9^2} \simeq \frac{8.9875\times 10^9}{4}\frac{3\times 10^{-6}}{(9\times 10^{-2})^2} \simeq$$

$$\simeq 832176 \text{ N / C} = 0.832176 \text{ MN / C}$$

Para una superficie esférica de radio 15 cm, que está en el vacío,

$$4\pi r_{15}^2 D(15) = q$$

$$D(15) = \frac{q}{4\pi r_{15}^2}$$

$$E(15) = \frac{D(15)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{15}^2} \simeq 8.9875\times 10^9 \frac{3\times 10^{-6}}{(15\times 10^{-2})^2} \simeq$$

$$\simeq 1.19833\times 10^6 \text{ N / C} = 1.19833 \text{ MN / C}$$

2.- Una varilla cilíndrica de diámetro $D = 1\text{cm}$ y longitud $L = 1\text{m}$ tiene polarización paralela al eje del cilindro de módulo $P = \left(5l^2 - 1\right)10^{-6}$, donde l es la distancia a un extremo O de la varilla. Hallar la densidad volúmica de carga de polarización en cada extremo y en el centro de la varilla, la densidad superficial de carga de polarización en cada punto de su superficie, y comprobar que la carga total de polarización es cero. Si $\varepsilon_r = 3$, hallar la susceptibilidad eléctrica del material, y el desplazamiento y el campo eléctrico en el centro de la varilla. Hallar la densidad volúmica de carga adicional en cada punto, en los extremos, y en el centro de la varilla.

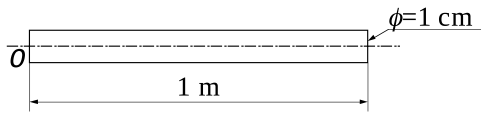

Fig. 2

Solución:

Haciendo coincidir el eje de la varilla con el eje x, la única componente no nula de la polarización es la de este eje. Por tanto

$$\rho_P = -\text{div}\,\boldsymbol{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial l} = -10^{-5}\, l$$

En los extremos la densidad volúmica de carga de polarización vale

$$\rho_P(0) = -10^{-5}\times 0 = 0$$

$$\rho_P(1) = -10^{-5}\times 1 = -10^{-5}\ \text{C}/\text{m}^3 = -10\ \mu\text{C / m}^3$$

En el centro

$$\rho_P(0.5) = -10^{-5}\times 0.5 = -5\times 10^{-6}\ \text{C}/\text{m}^3 = -5\ \mu\text{C / m}^3$$

La densidad superficial en cada punto es la componente de $\boldsymbol{P}$ perpendicular a la superficie y hacia fuera en ese punto. Como $\boldsymbol{P}$ es paralela al eje de la varilla la componente perpendicular a la superficie lateral del cilindro es nula, por tanto en cada punto de la superficie lateral del cilindro la densidad superficial de carga de polarización es cero. En cada extremo la polarización es perpendicular a la superficie, hacia dentro en la primera base del cilindro y hacia fuera en la segunda, por lo que la densidad superficial de carga de polarización en cada punto de las dos superficies es

$$\sigma_P(0) = -P(0) = 1\times 10^{-6}\ \text{C}/\text{m}^2 = 1\mu\text{C / m}^2$$

$$\sigma_P(1) = P(1) = (5\times 1^2 - 1)\times 10^{-6} = 4\times 10^{-6}\,\mathrm{C}/\mathrm{m}^2 = 4\,\mu\mathrm{C}/\mathrm{m}^2$$

Las cargas volúmica y superficial de polarización valen

$$q_{Pv} = \int_v \rho_P\,\mathrm{d}v = -\int_0^1 10^{-5}\,l\,\frac{\pi D^2}{4}\,\mathrm{d}l = -\frac{10^{-5}\pi D^2}{4}\left[\frac{l^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{10^{-5}\pi D^2}{8} = -\frac{\pi}{8}10^{-9}\,\mathrm{C}$$

$$q_{PS} = \int_S \sigma_P\,\mathrm{d}S = \frac{\pi D^2}{4}\sigma_P(0) + \frac{\pi D^2}{4}\sigma_P(1) = \frac{\pi D^2}{4}(1+4)\times 10^{-6} = \frac{\pi}{8}\times 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

Y la total

$$q_P = q_{Pv} + q_{PS} = -\frac{\pi}{8}10^{-9} + \frac{\pi}{8}10^{-9} = 0$$

$$\chi = \varepsilon_r - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\chi}\boldsymbol{P} \simeq \frac{1}{8.8542\times 10^{-12}\times 2}\left(5l^2 - 1\right)10^{-6}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} \simeq \frac{3}{2}\left(5l^2 - 1\right)10^{-6}\boldsymbol{i}$$

El módulo en el centro,

$$E(0.5) = \frac{1}{8.8542\times 10^{-12}\times 2}\left(5\times 0.5^2 - 1\right)10^{-6} \simeq$$

$$\simeq 14117.6\,\mathrm{V/m} \simeq 14.12\ \mathrm{kV/m}$$

$$D(0.5) = \varepsilon E(0.5) = \varepsilon_0\varepsilon_r E(0.5) = \frac{3}{2}\left(5\times 0.5^2 - 1\right)10^{-6} = 3.75\times 10^{-7}\,\mathrm{C}/\mathrm{m}^2$$

La densidad de carga adicional en el dieléctrico es

$$\rho = \nabla\mathrm{i}\boldsymbol{D} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}l} = 15\times 10^{-6}\,l$$

$$\rho(0) = 0$$

$$\rho(1) = 15\times 10^{-6}\ \mathrm{C}/\mathrm{m}^3 = 15\ \mu\mathrm{C}/\mathrm{m}^3$$

$$\rho(0.5) = 15\times 10^{-6}\times 0.5 = 7.5\times 10^{-6}\ \mathrm{C}/\mathrm{m}^3 = 7.5\ \mu\mathrm{C}/\mathrm{m}^3$$

3.- En el problema anterior hallar el campo y el desplazamiento eléctricos en puntos exteriores de la frontera de la varilla situados en cada base del cilindro y en su centro, es decir en l=0, l=1 m y l=0.5 m. El medio que rodea a la varilla es el aire, de permitividad relativa la unidad.

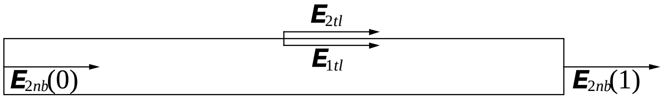

Fig. 3

Solución:

La componente del campo eléctrico tangencial a la frontera es continua: $E_{1t} = E_{2t}$.

El medio 1 es la varilla y el 2 el aire. Como $\mathbf{E}$ es paralelo al eje de la varilla en todos los puntos, coincide con la componente tangencial en la superficie lateral de la varilla; es decir, en el aire, en puntos próximos a la superficie lateral de la varilla,

$$E_{2tl} = E_{1tl} \simeq \frac{1}{8.8542 \times 10^{-12} \times 2}\left(5l^2 - 1\right)10^{-6}$$

En las dos bases del cilindro $\mathbf{E}_1$ es perpendicular a la frontera, por lo que

$$E_{1tb} = 0 = E_{2tb}$$

Para la componente normal

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma$$

Como $\sigma = 0$,

$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{1n}$$

En la superficie lateral $E_{1nl} = 0$, por lo que también $E_{2nl} = 0$.

En las bases

$$E_{1nb} \simeq \frac{1}{8.8542 \times 10^{-12} \times 2}\left(5l^2 - 1\right)10^{-6}$$

Por lo que

$$E_{2nb} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{1nb} \simeq \frac{3}{1}\frac{1}{8.8542 \times 10^{-12} \times 2}\left(5l^2 - 1\right)10^{-6}$$

En la base primera

$$E_{2nb}(0) = 3\frac{1}{8.8542 \times 10^{-12} \times 2}\left(5 \times 0^2 - 1\right)10^{-6} \simeq$$

$$\simeq -169411\,\mathrm{V/m} \simeq -169.4\ \mathrm{kV/m}$$

En la segunda

$$E_{2nb}(1) = 3\frac{1}{8.8542 \times 10^{-12} \times 2}\left(5 \times 1^2 - 1\right)10^{-6} \simeq$$

$$\simeq 677645\,\mathrm{V/m} \simeq 677.6\ \mathrm{kV/m}$$

O sea, también en puntos inmediatamente exteriores al dieléctrico el campo es paralelo al eje de la varilla. En la superficie lateral el módulo es el mismo en el interior que en un punto inmediatamente exterior, y en las bases del cilindro el módulo en el exterior es $\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2} = 3$ veces el módulo en el interior.

En general, el campo eléctrico es fácil de medir en el exterior de los cuerpos. Los problemas anteriores muestran que midiéndolo adecuadamente en puntos de su frontera, puede conocerse el campo en el interior de los dieléctricos.

4.- Una esfera de dieléctrico de 5 cm de diámetro y permitividad relativa 4, rodeada de aire, tiene en su centro una carga esférica de $10\,\mu\text{C}$ de radio despreciable. Hallar el campo eléctrico, la polarización y el desplazamiento en un punto que dista 2 cm del centro y en dos puntos inmediatamente próximos a la superficie que limita al dieléctrico, pero uno interior a ella y el otro exterior.

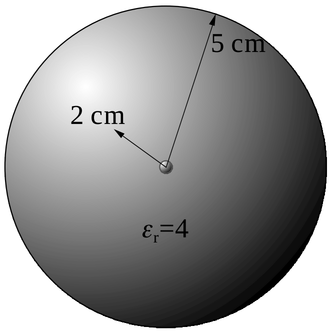

Fig. 4

Solución:

Como el dieléctrico es isótropo y la carga es positiva, el campo eléctrico, la polarización y el desplazamiento tienen la dirección del radio y sentido hacia fuera de la esfera.

$$E(2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{R^2} = \frac{k_0}{\varepsilon_r}\frac{q}{R^2} \simeq \frac{8.9875 \times 10^9}{4}\frac{10 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2} \simeq$$

$$\simeq 5.6172 \times 10^7 \text{ N / C} = 56.172 \text{ MN / C}$$

$$\chi = \varepsilon_r - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$P(2) = \varepsilon_0 \chi E = 8.8542 \times 10^{-12} \times 3 \times 5.6172 \times 10^7 \simeq$$

$$\simeq 1.49207 \times 10^{-3} \text{C / m}^2 = 1.49207 \text{ mC/ m}^2$$

$$D(2) = \varepsilon E(2) = \varepsilon_r \varepsilon_0 E(2) \simeq 4 \times 8.8542 \times 10^{-12} \times 5.6172 \times 10^7 \simeq$$

$$\simeq 1.9894 \times 10^{-3} \text{C / m}^2 = 1.9894 \text{ mC / m}^2$$

En un punto interior de la frontera las fórmulas son las mismas que las anteriores con R=5 cm y el campo también tiene la dirección del radio, es decir, perpendicular a la frontera:

$$E(5) \simeq \frac{8.9875 \times 10^9}{4} \frac{10 \times 10^{-6}}{(5 \times 10^{-2})^2} \simeq 8.9875 \times 10^6 \text{ N / C} = 8.9875 \text{ MN / C}$$

$$P(5) = 8.8542 \times 10^{-12} \times 3 \times 8.9875 \times 10^6 \simeq$$

$$\simeq 238.731 \times 10^{-6} \text{C / m}^2 = 238.731 \,\mu\text{C/ m}^2$$

$$D(5) \simeq 4 \times 8.8542 \times 10^{-12} \times 8.9875 \times 10^6 \simeq$$

$$\simeq 318.308 \times 10^{-6} \text{C / m}^2 = 318.308 \,\mu\text{C / m}^2$$

Como el campo eléctrico del interior de la frontera no tiene componente tangencial, que es continua, tampoco la tiene el campo del exterior de la frontera, por lo que ese campo es normal a la frontera, es decir, tiene también la dirección del radio. Utilizaremos las condiciones de contorno para hallarlo. Como en la frontera no hay carga distinta de la de polarización, si ahora el medio 1 es la esfera y el 2 el exterior, se tiene, en general

$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{1n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \frac{k_0}{\varepsilon_1} \frac{q}{R^2} \simeq \frac{k_0}{\varepsilon_{r2}} \frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{q}{R^2}$$

Es decir, el campo es el mismo que si solo existiera el medio 2: el medio 1 solo modifica el campo en puntos de él mismo. También, como $\varepsilon_{r2} = 1$,

$$E_{2n} = \varepsilon_{r1} E_{1n} \simeq 4 \times 8.9875 \times 10^6 = 35.95 \times 10^6 \text{N / C} = 35.95 \text{ MN / C}$$

Como en el exterior $\chi = 1 - 1 = 0$, la polarización es nula en todos los puntos.

El desplazamiento en los puntos exteriores de la frontera es

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 \simeq 8.8542 \times 10^{-12} \times 35.95 \times 10^6 \simeq$$

$$\simeq 318.308 \times 10^{-6} \text{C / m}^2 = 318.308 \,\mu\text{C / m}^2$$

Debido a la simetría, en el exterior de la esfera el campo sigue teniendo la dirección del radio y sentido hacia fuera.

5.- Hallar la densidad volúmica de carga de polarización de la esfera del problema anterior.

Solución:

En cada punto de la esfera que dista R del centro el módulo del campo eléctrico vale

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

La polarización es radial y vale

$$P = \varepsilon_0 \chi E = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_r}\frac{q}{R^2}$$

La densidad volúmica de carga de polarización es

$$\rho_{Pv} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

Como ***P*** solo depende de *R*, la divergencia de ***P*** en coordenadas esféricas vale

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 P\right)$$

Por tanto

$$\rho_{Pv} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_r}\frac{q}{R^2}\right) = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\chi q}{4\pi\varepsilon_r}\right) = 0$$

La carga volúmica de polarización vale

$$q_{Pv} = \int_v \rho_{Pv}\mathrm{d}v = \int_v 0\mathrm{d}v = 0$$

Es decir, si la polarización de una esfera de dieléctrico solo depende de la distancia al centro de la esfera, la densidad volúmica de carga de polarización es cero en todos los puntos y también es cero, por tanto, la carga volúmica de polarización.

6.- Hallar la carga superficial de polarización de la esfera de dieléctrico del problema anterior.

Solución:

No se trata estrictamente de una esfera, pues, además de la superficie de separación exterior, existe una superficie de separación entre la pequeña esfera interior cargada, de radio despreciable, y el dieléctrico. Para hallar la carga superficial de polarización hay que tener en cuenta estas dos superficies. La polarización es perpendicular a ambas y de sentido hacia fuera. Por tanto la densidad superficial de carga en el superficie exterior es

$$\sigma_{Psext} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n} = P = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_r}\frac{q}{(Rext)^2}$$

En la interior,

$$\sigma_{Psint} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n} = -P = -\frac{\chi}{4\pi\varepsilon_r}\frac{q}{(Rint)^2}$$

La carga superficial de polarización total es

$$q_{PS} = 4\pi\left(Rext\right)^2 \sigma_{Psext} + 4\pi\left(Rint\right)^2 \sigma_{Psint} =$$

$$= 4\pi\left(R\,ext\right)^2 \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_r} \frac{q}{(R\,ext)^2} - 4\pi\left(R\,int\right)^2 \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_r} \frac{q}{(R\,int)^2} = 0$$

También cero, como la carga volúmica de polarización. Debería esperarse, pues la carga total, la volúmica más la superficial de polarización deben sumar cero.

Por tanto, el resultado de poner una carga en el centro de una esfera de dieléctrico es crear cargas opuestas de polarización en las superficies de separación externa e interna.

7.- La permitividad relativa del agua del mar es $\varepsilon_r = 70$. Hallar el módulo del campo eléctrico que crea una carga puntual de $10\,\mu\mathrm{C}$ en un punto a $5\,\mathrm{m}$ de ella. Compararlo con el campo que crearía esa carga en ese punto si el medio fuera el vacío.

Solución

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi \times 70 \times 8.8542 \times 10^{-12}}\frac{10 \times 10^{-6}}{5^2} = 1283.93\ \mathrm{V/m}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi \times 8.8542 \times 10^{-12}}\frac{10 \times 10^{-6}}{5^2} = 89875.4\ \mathrm{V/m}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{89875.4}{1283.93} = 70$$

El módulo del campo en el agua es $70 = \varepsilon_r$ veces menor que en el vacío.