4. Circuito eléctrico

Félix Redondo Quintela y Roberto Carlos Redondo Melchor
Universidad de Salamanca

Fuerza electromotriz

Supóngase que se quiere conseguir una corriente estacionaria en la dirección del eje de un trozo de hilo conductor (fig. 1). Para ello se aplica un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en esa dirección, que produce un movimiento de cargas libres hacia un extremo. Este movimiento vacía progresivamente de ellas el otro extremo y crea un campo electrostático que se opone al que mueve las cargas. De esta manera es imposible mantener una corriente eléctrica del mismo sentido indefinidamente, pues, ese campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el conductor lo que logra es que las cargas se distribuyan para anularlo. Hay que añadir además que, en el corto instante en que hay movimiento de cargas, la corriente no sería estacionaria, pues produce variación de densidad de carga en los extremos.

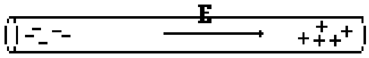

Fig. 1.- La corriente originada por el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ produce acumulación de cargas negativas en un extremo y positivas en el otro, distribución que, a su vez, crea un campo electrostático, no dibujado, de sentido contrario, que llega a anular el inicial y, por tanto, la corriente.

Como la pretensión es mantener una corriente eléctrica estacionaria en la dirección del eje del hilo, parece que una solución podría ser cerrar el hilo conductor sobre sí mismo, de forma que los dos extremos se toquen íntimamente, y mover las cargas sobre el *circuito* así formado. Las cargas se moverían como el agua en una tubería llena de ella y cerrada sobre sí misma. Realmente esta es la única solución posible (fig.2).

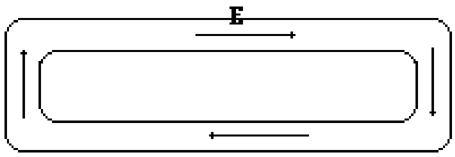

Fig. 2.- En un conductor cerrado sobre sí mismo (circuito), es posible, en principio, mantener una corriente eléctrica estacionaria.

Es necesario todavía encontrar un procedimiento para mover las cargas libres en el circuito. Podría pensarse en crear un campo electrostático a lo largo del conductor; pero ya se vio en la primera lección que es un campo conservativo:

$$\oint_c \boldsymbol{E}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

Resultaría que el trabajo que ese campo realizaría sobre una carga q que recorriera todo el circuito sería

$$\oint_c q\,\boldsymbol{E}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q \oint_c \boldsymbol{E}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

Es decir, el campo no realizaría trabajo alguno y, por tanto, no movería la carga en el circuito, pues se necesita energía para ello. Realmente esto es una característica de cualquier campo de fuerzas conservativo: no puede mover una partícula en un camino cerrado.

Un ejemplo imaginario puede aclarar este hecho: una forma de crear un campo electrostático podría ser colocar en la parte izquierda del circuito de la figura 3 una aglomeración de carga positiva añadida desde el exterior. Por su presencia se ha creado un campo electrostático que empujaría las cargas positivas libres del conductor hacia la derecha del circuito (los electrones hacia la izquierda), tanto las de la rama superior como las de la inferior. Las cargas desplazadas hacia la derecha crean a su vez un campo electrostático en las dos ramas hacia la izuierda. Realmente solo hay desplazamiento de carga hacia la derecha hasta que esta carga logra anular en el conductor el campo creado por la primera. Al final, lejos de haber hecho circular cargas permanentemente, se habría producido una aglomeración de carga positiva también en el extremo derecho[1]. Pero, incluso si se lograra mantener el campo electrostático inicial, este campo realizaría un trabajo sobre una carga positiva que moviera de izquierda a derecha por la rama superior, trabajo que debería hacerse en contra del campo si se pretende que esa carga volviera al punto de partida por la rama inferior.

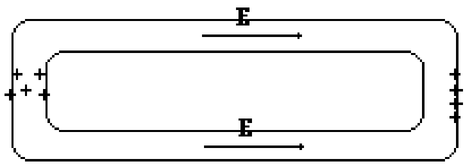

Fig. 3.- Si lográramos colocar cargas fijas en el extremo izquierdo del circuito, el campo electrostático tendría en ambas ramas, superior e inferior, el sentido indicado, y el resultado sería el desplazamiento de cargas positivas hacia el otro extremo hasta anular el campo inicial.

Para crear una corriente en el circuito es necesario, pues, crear en el conductor un campo eléctrico no conservativo $\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}$. Entonces, en cada punto del conductor, el campo total será $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}$. $\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}$ es el posible campo electrostático en cada punto, y $\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}$. el campo no conservativo. La circulación del campo total es ahora:

$$\oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{\mathrm{c}} (\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 + e$$

Como se ve, la circulación del campo total a lo largo del circuito ya no es cero debido a que no lo es la circulación del campo no conservativo. El valor de la circulación del campo total, que coincide con el valor de la circulación del campo no conservativo, se llama *fuerza electromotriz e*. Es decir,

$$e = \oint_{c} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{c} \boldsymbol{E}_{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Una *fuerza electromotriz* es pues un concepto que está asociado a un camino cerrado, cualquiera que este sea, en un conductor o no, y *es la circulación del campo eléctrico en ese camino cerrado*.

Lo importante es que ahora el campo realiza un trabajo no nulo a lo largo del circuito. Por tanto puede hacer recorrer a la carga q todo el circuito, y el trabajo que realiza entonces es

$$W = \oint_{c} q\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q\oint_{c} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = qe$$

Esta expresión nos permite enunciar una definición de *fuerza electromotriz* en un camino cerrado como el *trabajo que realiza el campo por cada unidad de carga a la que hiciera recorrer una vuelta en dicho camino cerrado;* pues, en efecto, en la fórmula anterior, si q=1, W=e. Además, también se deduce que la unidad en que se mide e es J/C=V (voltio), pues es una energía por cada unidad de carga[2].

---

[1] En lo sucesivo supondremos que son positivas las cargas libres de los conductores, pues, aunque sean metales, con cargas negativas libres, el resultado, como ya se expuso, es el mismo y la comodidad es notable.

[2] Observe el lector que la elección del nombre "*fuerza* electromotriz" para e no fue muy afortunada, pues no es fuerza, sino energía por unidad de carga.

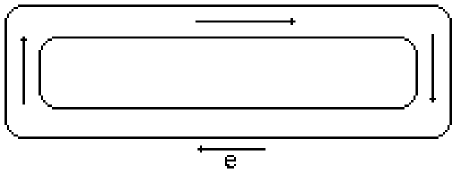

Fig. 4.- El sentido de la fuerza electromotriz en un circuito es el de la circulación del campo, es decir, el del campo no conservativo si este tuviera un solo sentido en el circuito.

El sentido que se asigna a la fuerza electromotriz es el sentido de la circulación del campo. Si el campo no conservativo solo tiene un sentido en el circuito, el sentido de la fuerza electromotriz es el de este campo, que coincide con el sentido de la corriente que produce, el sentido hacia donde el campo empuja las cargas positivas.

Supongamos un circuito eléctrico formado por un hilo conductor de resistividad ρ, sección s y longitud l, que es asiento de fuerza electromotriz, es decir, que en cada punto del conductor existe, además del posible campo electrostático, un campo eléctrico no conservativo. Entonces el campo eléctrico en cada punto del conductor es $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}$. Por otra parte también se cumple la ley de Ohm: $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$; $\boldsymbol{E}=\rho\boldsymbol{j}$, de forma que la circulación del campo a lo largo del circuito es

$$\oint_c \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = e = \oint_c \rho\boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_c \frac{\rho}{s} s\boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = i\oint_c \frac{\rho}{s}\mathrm{d}l = R_{\mathrm{t}} i$$

R_{t} es la resistencia del circuito. Se ha supuesto que la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ es la misma en todos los puntos de cualquier sección recta del hilo y que tiene en cada punto dirección tangente al camino de la integral, al circuito; por eso $js=i$. Resulta por tanto que, en un circuito con fuerza electromotriz e, se cumple que

$$e = R_{\mathrm{t}} i$$

Generadores

El campo no conservativo $\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}$ puede ser no nulo en todos los puntos del circuito o, por el contrario, puede ser no nulo solo en alguna o algunas partes de él. Esta última situación es muy común en los circuitos eléctricos. Por ejemplo, en la figura 5 el campo no conservativo solo es no nulo en la parte inferior del circuito entre los puntos A y B y, por tanto,

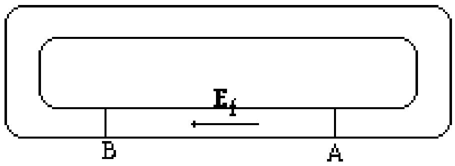

Fig. 5.- El campo no conservativo solo es no nulo en la parte inferior del circuito, entre A y B.

$$e = \oint_c (\boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_c \boldsymbol{E}_f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}_f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{E}_f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}_f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

O sea, la fuerza electromotriz coincide con la integral curvilínea del campo no conservativo en la parte de circuito donde este campo es no nulo. Se dice de esa parte de circuito que es un *generador*, y se representa como en la figura 6.

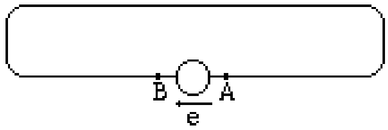

Fig. 6.- La parte de un circuito que es asiento de fuerza electromotriz se llama generador.

En la figura 6

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B (\boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_f)\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \boldsymbol{E}_e \cdot d\boldsymbol{l} + \int_A^B \boldsymbol{E}_f \cdot d\boldsymbol{l} = v_A - v_B + e$$

Por otra parte,

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \rho\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \frac{\rho}{s} js\, dl = i\int_A^B \frac{\rho}{s} dl = ri$$

r es la resistencia entre A y B por la parte inferior del circuito. Se llama *resistencia interna* del generador o, simplemente, *resistencia del generador*. Igualando los segundos miembros resulta:

$$v_A - v_B + e = ri; \quad e = v_B - v_A + ri$$

La última fórmula se llama *ecuación fundamental de los circuitos eléctricos*. La fuerza electromotriz e puede ser función del tiempo. Un generador cuya fuerza electromotriz es constante suele representarse como en la figura 7, por dos segmentos; el mayor es hacia donde se dirige el campo no conservativo.

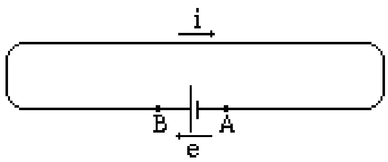

Fig. 7.- Un generador de fuerza electromotriz constante.

Como desde B hasta A por la parte superior del circuito no existe campo no conservativo, la intensidad se debe a la diferencia de potencial $v_B - v_A$, es decir, al campo electrostático. Y como desde B hasta A por arriba se mueven las cargas positivas por una resistencia R (la del hilo entre B y A por arriba), quiere decir que el punto B tiene mayor potencial que el A, o sea, v_B-v_A>0. Es decir, en un circuito con un generador de fuerza electromotriz constante, el terminal hacia donde se dirige la fuerza electromotriz, el terminal del segmento mayor, tiene mayor potencial que el del segmento menor; el primero se llama *terminal positivo* y el segundo *terminal negativo* (fig. 8). v=v_B-v_A>0 se llama *diferencia de potencial* del generador. Si es R la resistencia del conductor desde B a A por la parte superior, según la ley de Ohm

$$i = \frac{v}{R}; \quad v = Ri$$

Y

$$e = v + ri = Ri + ri = (R + r)i = R_t i$$

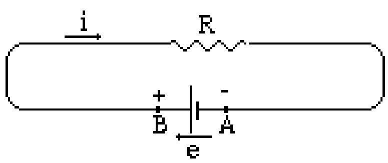

Fig. 9.- En el generador de este circuito*B* es el terminal positivo y *A* el negativo.

Como r es un número real positivo e i tiene el mismo signo que e, si e es positiva, todos los términos son positivos, por lo que e>v. Solo en el caso de que i=0, e=v. Precisamente es así como se mide la fuerza electromotriz de los generadores: con sus dos terminales abiertos, es decir, sin conectar nada entre ellos para que no exista circuito y no pueda circular corriente alguna, de manera que i=0; se mide entonces con un voltímetro la diferencia de potencial entre sus bornes y el resultado de esa medida es la fuerza electromotriz. Obsérvese también que, en el caso ideal de que la resistencia r del generador sea nula, la diferencia de potencial coincide siempre con la fuerza electromotriz, también cuando $i \neq 0$.

En Electrotecnia es habitual llamar tensión[3] entre dos puntos a la diferencia de potencial entre ellos. En la figura 24 se ha indicado el sentido de la diferencia de potencial o tensión[4] entre B y A como lo hemos venido haciendo, con una flecha desde el punto de mayor al de menor potencial. Esta flecha apunta en sentido contrario a la de la fuerza electromotriz, lo que no debe extrañar, pues, en efecto el punto B tiene mayor potencial que el punto A, de forma que, por la parte superior del circuito, donde no hay fuerza electromotriz, las cargas positivas se mueven desde el potencial v_B al v_A, e $i=v/R$. Si no existiera el generador, estas cargas también irían desde B a A por la parte inferior del circuito, porque también por ese camino B tiene mayor potencial que A (la diferencia de potencial entre dos puntos es única y no depende del camino por donde se halle); lo que ocurre es que entre A y B hay otro campo, además del electrostático, en el sentido de A a B, que es el que mueve las cargas positivas por dentro del generador desde A a B. Por eso la flecha de la fuerza electromotriz tiene ese sentido, opuesto a la diferencia de potencial. Entre A y B por el generador existen pues dos campos; el electrostático en el sentido de B a A (B mayor potencial que A) y el no conservativo en el sentido de A a B. Hay corriente porque este campo supera al electrostático (e supera a v)[5].

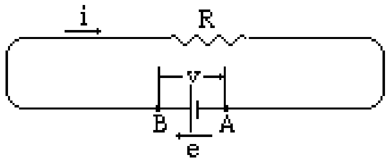

Fig. 10.- Si el sentido de la diferencia de potencial se representa por flecha, esta tiene sentido contrario a la que indica el sentido positivo de la fuerza electromotriz.

Con frecuencia, al representar un generador, se representa explícitamente su resistencia interna r, (fig. 11). Así se supone que el tramo $A'B$ es el asiento de la fuerza electromotriz y que

---

[3] Originalmente se llamó *tensión* a la integral curvilínea de cualquier campo eléctrico entre dos puntos. Si el campo es electrostático la tensión coincide con la diferencia de potencial entre esos puntos. Pero si el campo no es conservativo, la integral curvilínea entre dos puntos no coincide con la diferencia de potencial entre ellos. Además, con este significado, la tensión depende del camino de integración. Por eso la tensión entre dos puntos no sería única, depende del camino. La figura 20 puede servir para ilustrar ese hecho: si se halla la integral curvilínea del campo entre B y A por la parte superior del circuito, o sea, la tensión entre B y A por la parte superior, el resultado es la diferencia de potencial entre B y A, pues en esa parte de circuito solo hay campo electrostático. Pero la misma integral por la parte inferior del circuito vale

$$\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_B^A (\boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_f) \cdot d\boldsymbol{l} = \int_B^A \boldsymbol{E}_e \cdot d\boldsymbol{l} + \int_B^A \boldsymbol{E}_f \cdot d\boldsymbol{l} = v_B - v_A - e$$

En la actualidad, sin embargo, el término *tensión entre dos puntos* se utiliza siempre como sinónimo de *diferencia de potencial* entre esos dos puntos, habiendo perdido su significado original, que solo conserva en la expresión *tensión de un circuito* , que es su fuerza electromotriz (la diferencia de potencial sería cero, pues un circuito es un camino cerrado).

[4] La palabra inglesa equivalente a tensión es *voltage*; como consecuencia de ello se ha introducido en español *voltaje*.

[5] La comprensión del papel de los generadores en los circuitos es una de las dificultades más frecuentes entre los alumnos de Física. Un error común es creer que los generadores crean cargas que inyectan al circuito por alguno de sus terminales, y esto a pesar de conocer la propiedad de conservación de la carga y la ecuación de continuidad. Como en la teoría explicada se pone de manifiesto, el generador se limita a hacer circular en el circuito las cargas libres del conductor, algo así como hace la bomba con el agua de un circuito de calefacción.

carece de resistencia, por lo que, entre esos dos puntos, los valores de la diferencia de potencial entre B y A' y de la fuerza electromotriz en el sentido $A'B$ coinciden, es decir,

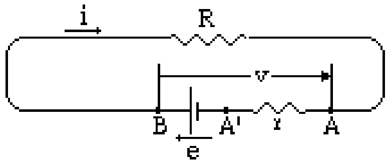

Fig. 11.- Se acostumbra a representar explícitamente la resistencia interna de los generadores.

$$v_{BA'} = e$$

Ese tramo se llama generador ideal. Es decir, la tensión de un generador ideal (en la figura 11 $v_{\mathrm{BA'}} = e$) no depende de la intensidad que circule por él.

Ahora la ecuación del circuito queda:

$$e = v_{\mathrm{BA'}} = Ri + ri = v_{\mathrm{BA}} + v_{\mathrm{AA'}}$$

O sea,

$$v_{\mathrm{BA}} + v_{\mathrm{AA'}} + v_{\mathrm{A'B}} = 0$$

Se ha tenido en cuenta que

$$v_{\mathrm{A'B}} = -v_{\mathrm{BA'}}$$

Segunda ley de Kirchhoff

Que la suma de las tensiones es cero en todo camino cerrado es una consecuencia de la definición de tensión, que es sinónimo de diferencia de potencial. En efecto, cualesquiera que sean los puntos *ABCDA*, se llaman *camino cerrado*, porque el primero y el último coinciden; la suma de las tensiones entre ellos, recorrido el camino en el sentido de la sucesión de puntos es

$$(v_A - v_B) + (v_B - v_C) + (v_C - v_D) + (v_D - v_A) = 0$$

No hace falta, pues, que los puntos formen parte de una red eléctrica o de un circuito, sino que la anterior igualdad es cierta para cualquier camino cerrado, haya o no conductores entre ellos. Este hecho se conoce como *segunda ley de Kirchhoff*: *la suma de las tensiones de todo camino cerrado es cero*. Por ejemplo, si, partiendo de A, recorremos el camino cerrado de la figura 12 a derechas, como indica la flecha central hasta volver a A, la diferencia de potencial es cero. Es decir:

$$0 = e_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 - e_2 + R_3 i_3 - e_3 + e_4 - R_4 i_4$$

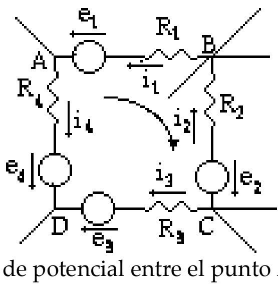

Fig. 12.- La diferencia de potencial entre el punto A y él mismo es cero.

Cuando se aplica la segunda ley de Kirchhoff a las redes eléctricas frecuentemente se reúnen en el primer miembro las fuerzas electromotrices así:

$$-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 = -R_1 i_1 - R_2 i_2 + R_3 i_3 - R_4 i_4$$

La segunda ley de Kirchhoff permite hallar con gran facilidad la tensión entre dos puntos: por ejemplo, en la figura 13

$$v_{AC} + v_{CB} + v_{BA} = 0$$

y,

$$v_{AC} = -v_{CB} - v_{BA} = v_{AB} + v_{BC}$$

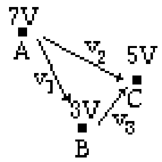

Fig. 13.- El potencial de tres puntos.

Es decir, la tensión v_{AC} entre dos puntos es igual a la suma de las tensiones intermedias. También

$$v_1 = v_2 - v_3$$

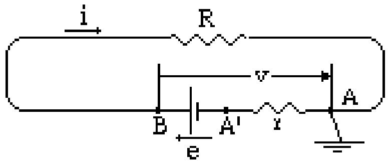

Fig. 14.- El punto A se toma como referencia de potenciales.

En los circuitos solo tienen interés las tensiones y no los potenciales; pero, a veces, se toma una referencia arbitraria a la que se asigna el potencial cero, de forma que la diferencia de potencial entre cualquier punto y el de referencia se llama también potencial de ese punto[6]. En la figura 14 se representa que el punto A se ha tomado como referencia de potenciales[7].

Ecuación de potencias

La ecuación fundamental $e=v+ri$ sugiere también una interpretación energética: la fuerza electromotriz e es el trabajo que realiza el campo no conservativo cuando traslada la unidad de carga positiva desde A hasta B por el generador. Pero este trabajo se realiza en contra del

[6] La confusión de términos como *potencial, tensión, caída de tensión y fuerza electromotriz* es frecuente, por lo que conviene insistir en que el *potencial* se refiere a un punto. Expresiones como *potencial de un generador* y *potencial de una resistencia* no son correctas. *Tensión* es una diferencia de potencial entre dos puntos o entre dos extremos de un objeto eléctrico: son correctas expresiones como *tensión de una resistencia* y *tensión de un generador*, que es la diferencia de potencial entre sus extremos. Es incorrecta la expresión *tensión de un punto*. Es correcta la expresión *diferencia de potencial entre dos puntos*. El nombre *caída* suele utilizarse antepuesto a *potencial* y, sobre todo, a *tensión*. Significa *disminución*. *Caída de potencial* en un punto es una expresión correcta que significa disminución del potencial en ese punto. Pero, si entre los extremos de una resistencia existe una diferencia de potencial, existe una *tensión* en la resistencia, no una caída de tensión, como se dice a veces. Sólo se produciría una caída de la tensión de la resistencia si la tensión pasara de valer, por ejemplo, 20 V a 15 V: la tensión habría caído 5 V. Como se verá más adelante, la tensión entre dos conductores de una línea eléctrica suele ser mayor al principio que al final de la línea; en ese caso, la tensión sí cae a lo largo de la línea. No es de poca importancia una razonable atención a la precisón terminológica, no sólo por la necesidad de entendimiento, que es lo más importante, sino porque las palabras empleadas expresan siempre el grado de conocimiento que sobre un tema se posee.

[7] El mismo símbolo se utiliza en las instalaciones eléctricas para indicar los puntos “que se ponen a tierra”, es decir, puntos o partes de aparatos que se conectan, por medio de conductores, a picas y rejas metálicas enterradas en tierra con objeto de conseguir que la diferencia de potencial entre esos puntos y la tierra sea nula.

campo electrostático, pues se traslada la carga desde un punto A a otro B de mayor potencial. Cuando la carga llega a B, queda sometida solo a la diferencia de potencial v, por lo que se dirige por el conductor de resistencia R hacia el punto A de menor potencial. Resulta pues que el generador comunica a cada unidad de carga positiva que sitúa en B una energía v. Esta unidad de carga "cae" después hasta A y realiza un trabajo igual a v. Si en vez de *uno* el generador mueve q culombios, el trabajo que realiza para llevar la carga de A a B es qv, que es el que la carga cede a R al caer hasta A. Se realiza una transferencia de energía del generador a la resistencia.

Si se multiplica la ecuación fundamental por la intensidad i resultan las potencias del circuito:

$$ei = vi + ri^2$$

Como e es la energía que el generador entrega a cada unidad de carga que coloca en el terminal positivo, ei es la potencia, o sea, energía que entrega cada segundo, pues i es la carga que coloca en el terminal positivo cada segundo. vi es la potencia que absorbe la resistencia R. Como $i=v/R$, esta potencia vale $vi=Ri^2=v^2/R$. Por último ri^2 es la potencia que absorbe la resistencia del generador.

Un generador se caracteriza por su fuerza electromotriz y por su resistencia interna. Además, como debido a la potencia que absorbe su resistencia interna, ri^2, se elevará su temperatura, ha de limitarse la intensidad para que la temperatura no alcance valores peligrosos para los componentes del generador. Esta limitación de la intensidad se enuncia a veces de forma indirecta expresando la potencia máxima ei que el generador puede suministrar. Así se dice por ejemplo: un generador de 100 V, 500 W y 0,1Ω de resistencia interna. Aunque no se enuncie explícitamente, se deduce que la intensidad máxima es 500/100=5A.

Receptores

Hay objetos de dos terminales tales que, siempre que se establece una tensión v entre ellos, circula en el mismo sentido una intensidad i. Por tanto la potencia que absorbe el objeto, $p=vi$, es siempre positiva. Dichos objetos son siempre receptores de energía o, simplemente, *receptores*.

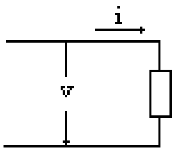

Fig. 15.- Si v e i son siempre ambas positivas o ambas negativas la potencia que absorbe el objeto de dos terminales es siempre positiva.

Hay, sin embargo, objetos en los que, al aplicarles una tensión entre sus terminales, circula una intensidad que puede tener el mismo u opuesto sentido que la tensión. Cuando tiene el mismo sentido el objeto es un receptor, cuando distinto, es un generador. En el primer caso la potencia absorbida es positiva y en el segundo negativa. Hay objetos de dos terminales que pueden actuar durante un tiempo como receptores y durante otro como generadores. Entre ellos se encuentran las baterías de acumuladores eléctricos, los motores y dínamos de corriente continua, los alternadores y los motores de corriente alterna. Una batería, como la de un automóvil por ejemplo, funciona como receptor cuando se carga. La característica común de estos objetos es que son asiento de fuerza electromotriz, y se llaman por ello *receptores activos*.

En la figura 16 se muestra la situación. Se ha separado la resistencia interna de la fuerza electromotriz. En la figura supondremos que el campo electrostático asociado a la diferencia de potencial v es mayor que el campo no conservativo asociado a la fuerza electromotriz e, resultando la corriente en el sentido contrario a e. Esto solo puede deberse a que hay otro generador no dibujado que empuja las cargas positivas en el sentido de la intensidad. Con esa situación, en la parte que es asiento de fuerza electromotriz se realiza trabajo en contra del campo $\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}$ del generador en una cantidad que, por cada unidad de carga que pasa del terminal positivo al negativo de la fuente vale

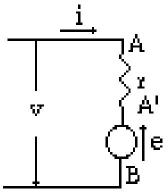

Fig. 16.- Si v e i son a la vez positivos o a la vez negativos el dipolo es un receptor.

$$\int_{A'}^{B} \left(-\boldsymbol{E}_f\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = e$$

De forma que, como i es la carga que pasa por cada unidad de tiempo, ei es la potencia que el campo electrostático realiza en contra del campo no conservativo, o sea, la potencia que absorbe el receptor y transforma en otro tipo de energía: mecánica si el objeto es un generador-motor, tal como una dínamo o un alternador, o química si se trata de un acumulador. Ahora e se llama *fuerza contraelectromotriz*. Cuando una batería, una dínamo o un alternador, que son generadores, funcionan como receptores, la fuerza contraelectromotriz es su fuerza electromotriz cuando funcionan como generadores.

De la propia figura 30 se obtiene que

$$v=ri+e,$$

que se llama ecuación del receptor. De ella, multiplicando por i, resultan las potencias:

$$vi=ei+ri^2.$$

vi es la potencia que se entrega al receptor. Parte de ella, ei, es absorbida por él y transformada en mecánica, química, etc[8]. El resto, ri^2, incrementa la energía interna de la resistencia y, al final, se disipa en calor.

Rendimiento de generadores y de receptores

El fin de un generador es suministrar energía a la parte del circuito exterior a él, a R en la figura 31. De aquí que, cuando se habla en general del rendimiento de un generador, se considera potencia útil a la entregada a la parte exterior del circuito:

$$p_{\mathrm{u}}=vi$$

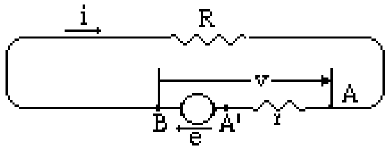

Fig. 17.- El dipolo AB funciona como generador porque $v<e$.

[8] Una definición inicial e intuitiva de *fuerza contraelectromotriz* es *la parte de energía que, por cada unidad de carga que pasa por el receptor, éste transforma en útil.* Como cada segundo pasan por el receptor i culombios, la potencia que el receptor transforma en útil es ei.

La potencia eléctrica total del generador es

$$p_t = ei,$$

de manera que el rendimiento es

$$\eta = \frac{p_u}{p_t} = \frac{vi}{ei} = \frac{v}{e} = \frac{e - ri}{e} = 1 - \frac{ri}{e}$$

El rendimiento es siempre menor que uno porque en el generador $v<e$.

En la figura 18 se dibuja un receptor de fuerza contraelectromotriz e. Es un receptor si, siendo v y e positivos, es $v>e$.

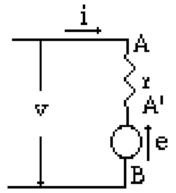

Fig. 18.- El dipolo AB es un receptor porque $v>e$.

Un receptor tiene como fin transformar la potencia eléctrica que se le entrega, vi, en otro tipo de potencia: mecánica si es un motor, o química si es una batería de acumuladores eléctricos, por ejemplo. De ahí que, hablando en general, se considere potencia útil de un receptor a

$$p_u = ei$$

La potencia total que se entrega al receptor es

$$p_t = vi$$

Por tanto el rendimiento es

$$\eta = \frac{p_u}{p_t} = \frac{ei}{vi} = \frac{e}{v} = \frac{v - ri}{v} = 1 - \frac{ri}{v}$$

menor que uno, ya que ahora $e<v$.

Las potencias que se han manejado son instantáneas, lo que da lugar a un rendimiento instantáneo, que tiene poco interés cuando v e i varían con el tiempo; entonces se prefiere definir el rendimiento como el cociente entre los valores medios de las potencias útil y total. Las fórmulas deducidas tienen utilidad directa cuando v e i son constantes.[9]

Puede ocurrir que en una red eléctrica nos encontremos con objetos de dos terminales que son asiento de fuerza electromotriz de los que haya que averiguar si funcionan como generadores o como receptores. Basta para ello determinar el verdadero sentido de la corriente eléctrica: si el sentido de la intensidad coincide con el de la fuerza electromotriz el objeto funciona como generador, en caso contrario como receptor. Un caso puede presentarse, sin embargo, que merece un comentario especial. Se ilustra en la figura 19. Allí, según la segunda ley de Kirchhoff,

---

[9] Una corriente eléctrica de intensidad constante se llama corriente continua (cc) (*Direct Current, DC* en inglés). Un generador cuya fuerza electromotriz (fem) es constante se llama generador de corriente continua.

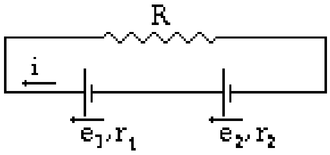

Fig. 19.

$$e_1 + e_2 = (R + r_1 + r_2)i$$

$$i = \frac{e_1 + e_2}{R + r_1 + r_2}$$

Para e_1=e_2=10 V, R=r_1=0,5 Ω y r_2=4 Ω, la intensidad vale i=4 A. Por tanto la potencia que suministra la fuerza electromotriz de cada generador es p_1=p_2=e_1i=e_2i=10.4=40 W. Y la que absorbe el segundo generador por su resistencia interna es r_2i^2=4.4^2=64W>40 W; es decir, más que la que genera su fuerza electromotriz; por lo tanto este generador actúa como receptor neto: aun generando energía eléctrica, la que absorbe su resistencia interna es mayor que la que produce su fuerza electromotriz. Esta situación solo puede presentarse en circuitos o redes con más de un generador.

Problemas

1.- En la figura 1 se representa una batería de 12 V de fuerza electromotriz y 1 Ω de resistencia interna conectada a una resistencia exterior de 2 Ω. Averiguar la intensidad del circuito, la tensión de la batería, la potencia que absorbe la resistencia exterior y la que absorbe la resistencia interna de la batería. ¿En qué sentido circulan los electrones libres por el interior de la batería? ¿Cuántos atraviesan una sección del conductor en cada unidad de tiempo? Si se toma como origen de potenciales el punto *A*, ¿cuál es el potencial del punto *B*? Hallar el rendimiento de la batería.

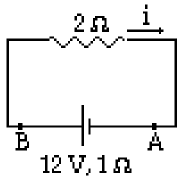

Fig. 1.

Solución:

$$i = \frac{e}{R_t} = \frac{e}{R + r} = \frac{12}{2 + 1} = 4 \text{ A}$$

$$v = Ri = 2 \times 4 = 8\text{V}$$

O bien

$$v = e - ri = 12 - 1 \times 4 = 8\text{V}$$

$$P_R = Ri^2 = 2 \times 4^2 = 32 \text{ W}$$

$$P_r = ri^2 = 1 \times 4^2 = 16 \text{ W}$$

Por el interior de la batería los electrones libres circulan del terminal positivo al negativo, es decir, de *B* a *A*.

El número de culombios que atraviesa una sección del conductor cada segundo es i=4 A=4 C/s. Como cada electrón tiene 1.602×10^{-19}C, en los 4 C hay

$4 / 1.602 \times 10^{-19} = 2.50 \times 10^{19}$ electrones, que son los que cruzan una sección del conductor cada segundo.

Si se toma como origen de potenciales el punto A el potencial de B es 8 V.

$$\eta = \frac{v}{e} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \cong 0.67.$$

2.- Hallar i, v_{AB}, v_{BC} y v_{AC} en el circuito de la figura. Hallar la potencia que absorbe la resistencia R y cada una de las resistencias internas de las dos baterías. ¿Qué potencia eléctrica produce cada batería? Hallar el rendimiento de cada generador.

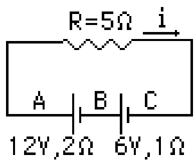

Fig. 2.

Solución:

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff se tiene: $e_1+e_2=(R+r_1+r_2)i$, de donde

$$i = \frac{e_1 + e_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{12+6}{5+2+1} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2.25\,\text{A}$$

$$v_{AB} = 12 - 2 \times 2.25 = 7.5\,\text{V}$$

$$v_{BC} = 6 - 1 \times 2.25 = 3.75\,\text{V}$$

$$v_{AC} = Ri = 5 \times 2.25 = 11.25\,\text{V}$$

$$\mathrm{P_R} = \mathrm{Ri}^2 = 5 \times 2{,}25^2 = 25{,}3125\,\text{W}\,;$$

$$P_{r_1} = r_1 i^2 = 2 \times 2.25^2 = 10.125\,\text{W}$$

$$P_{r_2} = 1 \times 2.25^2 = 5.0625\,\text{W}$$

La potencia total absorbida en el circuito es

$$P_t = P_R + P_{r_1} + P_{r_2} = 25.3125 + 10.125 + 5.0625 = 40.5\,\text{W}$$

La potencia total producida por las baterías debe ser la misma. Cada una produce

$$P_1 = e_1 i = 12 \times 2.25 = 27\,\text{W}$$

$$P_2 = 6 \times 2.25 = 13.5\,\text{W}$$

$$P_1 + P_2 = 27 + 13.5 = 40.5\,\text{W} = P_t$$

$$\eta_1 = \frac{v_{AB}}{e_1} = \frac{7.5}{12} = 0.625$$

$$\eta_2 = \frac{v_{BC}}{e_2} = \frac{3.75}{6} = 0.625$$

3.- Si se cambia la polaridad de la batería de 6 V del problema anterior, hallar i, v_{AB}, v_{BC} y v_{AC}. Hallar la potencia que absorbe la resistencia R y cada una de las resistencias internas. Averiguar qué batería actúa en el circuito como generador y cuál como receptor y qué potencia suministra una y absorbe la otra. Hallar los rendimientos.

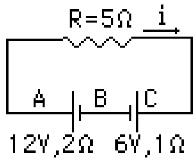

Fig. 3.

Solución:

$$i = \frac{12-6}{5+2+1} = 0{,}75\text{A};$$

$$v_{AB} = 12 - 2 \times 0{,}75 = 10{,}5\text{V}; \quad v_{BC} = -6 - 1 \times 0{,}75 = -6{,}75\text{V};$$

$$v_{AC} = 12 - 2 \times 0{,}75 - 6 - 1 \times 0{,}75 = 3{,}75\text{V};$$

$$P_R = Ri^2 = 5 \times 0{,}75^2 = 2{,}8125\text{W};$$

$$P_{r1} = r_1 i^2 = 2 \times 0{,}75^2 = 1{,}125\text{W}; \quad P_{r2} = r_2 i^2 = 1 \times 0{,}75^2 = 0{,}5625\text{W};$$

Como la intensidad *i* es positiva, la batería de 12V actúa como generador y la de 6V como receptor. La potencia total que suministra la batería de 12V es

$$P_1 = e_1 i = 12 \times 0{,}75 = 9\text{W};$$

la que absorbe la batería de 6 V (sin contar la que absorbe su resistencia interna) es

$$P_2 = e_2 i = 6 \times 0{,}75 = 4{,}5\text{W};$$

La potencia absorbida en el circuito por todos los conceptos es

$$P_t = 2{,}8125 + 1{,}125 + 0{,}5625 + 4{,}5 = 9\text{W},$$

igual a la potencia total generada por la batería que funciona como generador.

$$\eta_1 = \frac{v_{AB}}{e_1} = \frac{10{,}5}{12} = 0{,}875; \quad \eta_2 = \frac{e_2}{v_{CB}} = \frac{6}{6{,}75} = 0{,}89.$$

4.- Las baterías de acumuladores almacenan energía. Para cargarlas[10] se aplica entre el terminal positivo y negativo una diferencia de potencial mayor que la fuerza electromotriz; de esa manera las cargas positivas circulan, por dentro de la batería, en sentido contrario a la fuerza electromotriz, que ahora es fuerza contraelectromotriz, entregándosele una potencia para almacenar que vale ei. Sin embargo, en la práctica, la carga de una batería se expresa en amperios-hora (Ah), que es una unidad de carga eléctrica. Esto, y la misma expresión "cargar una batería", puede transmitir la errónea idea de que las baterías almacenan carga eléctrica. La razón de expresar la carga[11] de una batería en unidades de carga eléctrica es que, para una fuerza electromotriz dada (fuerza contraelectromotriz ahora), por cada *q* culombios de carga que atraviesan la batería, ésta almacena una energía igual a *qe* julios. Por tanto, si conocemos la carga que ha pasado, basta multiplicar por la fuerza electromotriz y se obtiene la energía almacenada. Para comprender mejor lo expuesto, supongamos que se quiere cargar totalmente y desde cero una batería de 40 Ah, 12 V de fuerza electromotriz y 0,1 Ω de resistencia interna. Para ello le aplicamos directamente una diferencia de potencial de 12,1V. Averiguar la intensidad y el tiempo que tarda en cargarse la batería y la energía que almacena cuando se completa la carga. Idem si la tensión que se le aplica es 15V. Comprobar la gran

---

10 La expresión cargar una batería significa comunicarle energía para que la almacene.

11 Cantidad que, para mayor confusión, recibe el nombre de capacidad de la batería, la cual no tiene nada que ver con la capacidad de un condensador.

influencia que ligeros incrementos de tensión tienen en la intensidad. Esto es debido a la baja resistencia interna de la batería; por eso nunca se carga una batería de baja resistencia interna aplicándole directamente una diferencia de potencial, sino que se hace siempre con una resistencia en serie como se indica en la figura 4. Averiguar el valor de dicha resistencia limitadora si se dispone de una fuente de 20V y se quiere que la intensidad no sobrepase los 5A.

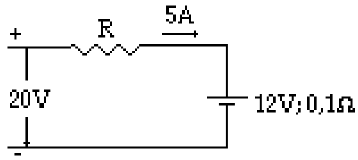

Fig. 4.

Solución:

$$v = e + r\,i;\quad i = \frac{v - e}{r} = \frac{12{,}1 - 12}{0{,}1} = 1\text{A};\quad q = it;\quad t = \frac{q}{i} = \frac{40}{1} = 40\text{h};$$

$$1\text{Ah} = 1\text{A} \times 3600\,\text{s} = 3600\text{C};$$

$$W = qe = 40 \times 3600 \times 12 = 1728000\,\text{J} = 1{,}728\text{MJ};$$

$$i' = \frac{15 - 12}{0{,}1} = 30\text{A};\quad t = \frac{40}{30} = 1{,}33\,\text{h};\quad 5 = \frac{20 - 12}{R + 0{,}1};\quad R = \frac{8 - 0{,}5}{5} = 1{,}5\Omega.$$

5.- La figura 5b) muestra la gráfica de la fuerza electromotriz del generador del circuito de la figura 5a). Averiguar la intensidad *i*, la diferencia de potencial *v*, el valor eficaz de *e*, de *v* y de *i*; el valor medio de la potencia que absorbe la resistencia de 4 Ω y de la que absorbe la resistencia interna del generador; y la energía que absorbe cada una en 1 minuto de funcionamiento.

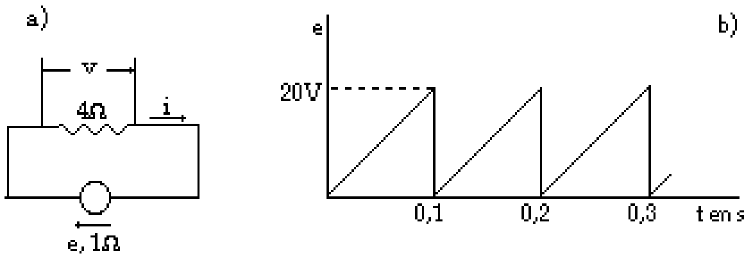

Fig. 5.

Solución:

$$i = \frac{e}{R + r} = \frac{e}{4 + 1} = \frac{1}{5}e;\quad I_M = \frac{E_M}{5} = \frac{20}{5} = 4\text{A};$$

$$v = Ri = \frac{4}{5}e;\quad V_M = \frac{4}{5}E_M = \frac{4}{5} \times 20 = 16\text{V};$$

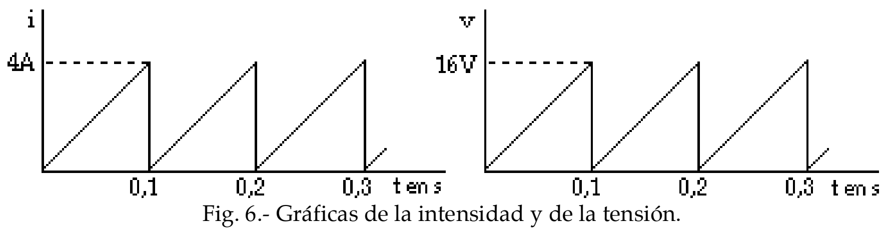

Fig. 6.- Gráficas de la intensidad y de la tensión.

Entre 0 y 0,1 segundos la fuerza electromotriz es

$$e = \frac{20}{0,1}t = 200\,t \quad \text{si} \quad 0 \le t \le 0,1;$$

El valor eficaz en un período vale

$$E = \sqrt{\frac{1}{0,1}\int_0^{0,1} e^2 dt} = \sqrt{10\int_0^{0,1} 200^2 t^2 dt} = \sqrt{4 \times 10^5 \int_0^{0,1} t^2 dt} =$$

$$\sqrt{4 \times 10^5 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{0,1}} = \sqrt{4 \times 10^5 \times \frac{10^{-3}}{3}} = 11,55\,\text{V}.$$

Entre 0 y 0,1 segundos

$$v = \frac{16}{0,1}t = 160\,t \quad \text{si} \quad 0 \le t \le 0,1;$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{0,1}\int_0^{0,1} v^2 dt} = \sqrt{10\int_0^{0,1} 160^2 t^2 dt} = \sqrt{256000 \int_0^{0,1} t^2 dt} =$$

$$= \sqrt{256000 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{0,1}} = \sqrt{256000 \times \frac{10^{-3}}{3}} = 9,24\,\text{V}.$$

Entre 0 y 0,1 *i* es

$$i = \frac{4}{0,1}t = 40\,t \quad \text{si} \quad 0 \le t \le 0,1;$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{0,1}\int_0^{0,1} i^2 dt} = \sqrt{10\int_0^{0,1} 40^2 t^2 dt} = \sqrt{16000 \int_0^{0,1} t^2 dt} =$$

$$= \sqrt{16000 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{0,1}} = \sqrt{16000 \times \frac{10^{-3}}{3}} = 2,31\,\text{A};$$

$$P_R = RI^2 = 4 \times 2,31^2 = 21,33\,\text{W}; \quad P_r = rI^2 = 1 \times 2,31^2 = 5,34\,\text{W};$$

$$W_R = P_R t = 21,33 \times 60 = 1279,8\,\text{J}; \quad W_r = P_r t = 5,34 \times 60 = 320,4\,\text{J}.$$

6.- Resolver el problema anterior si la fuerza electromotriz del generador es e=311sen314,16t (*e* en voltios cuando *t* en segundos).

Solución:

$$i = \frac{e}{R + r} = \frac{311\,\text{sen}\,314,16\,t}{4 + 1} = 62,2\,\text{sen}\,314,16\,t;$$

$$v = Ri = 4 \times 62,2\,\text{sen}\,314,16\,t = 248,8\,\text{sen}\,314,16\,t;$$

En los problemas del capítulo anterior se demostró que el valor eficaz de una función sinusoidal es el valor máximo o amplitud dividido por raíz cuadrada de dos. Resulta por tanto,

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 219.91\,\text{V}; \quad V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{248,8}{\sqrt{2}} = 175,93\,\text{V};$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{62,2}{\sqrt{2}} = 43,99\,\text{A};$$

$P_R = RI^2 = 4 \times 43{,}99^2 = 7737{,}68\,W$;

$P_r = rI^2 = 1 \times 43{,}99^2 = 1934{,}42\,W$;

$W_R = P_R t = 7737{,}68 \times 60 = 464260{,}8\,J$;

$W_r = P_r t = 1934{,}42 \times 60 = 116065{,}2\,J$.

7.- Demostrar que *n* generadores en serie equivalen a uno que tenga por fuerza electromotriz la suma de las fuerzas electromotrices y por resistencia interna la suma de las resistencias internas de cada uno de ellos. Particularizar el resultado para n generadores idénticos.

Solución:

En la figura 7 se tiene:

$$v = e_1 - r_1 i + e_2 - r_2 i + \ldots + e_n - r_n i =$$
$$= (e_1 + e_2 + \ldots + e_n) - (r_1 + r_2 + \ldots + r_n) i = e - ri$$

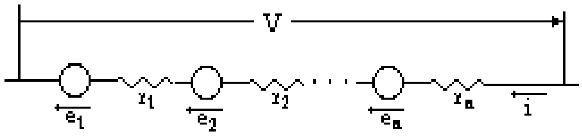

Fig. 7.

Es decir, se obtiene la ecuación de un generador, v=e-ri, con

$$e = (e_1 + e_2 + \ldots + e_n) \quad y \quad r = (r_1 + r_2 + \ldots + r_n).$$

Si los generadores son idénticos de fuerza electromotriz e' y de resistencia interna r', resulta para el generador equivalente e=ne' y r=nr'.

8.- La figura 8 representa un puente de Wheatstone, que sirve para hallar la resistencia R_x conocidas las otras tres. R_2 debe ser variable. La utilización del puente se muestra esquemáticamente en este problema: consiste en ajustar R_2 hasta que la corriente por el galvanómetro sea cero. Hallar entonces R_x en función de las otras tres resistencias.

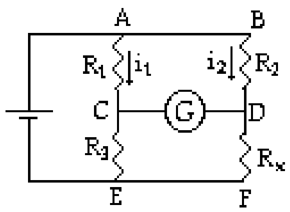

Fig. 8.- Puente de Wheatstone.

Solución:

Cuando, variando R_2, se consigue que no pase corriente por G (que para los efectos es una resistencia), es porque la diferencia de potencial entre C y D es cero. Además, como por G no pasa corriente, i_1 recorre R_1 y R_3; e i_2 recorre R_2 y R_x. Por tanto,

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \quad y \quad R_3 i_1 = R_x i_2.$$

Dividiendo la primera por la segunda,

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_x}; \quad R_x = R_2\frac{R_3}{R_1}.$$

9.- La figura 9a) representa un divisor de tensión. Se trata de dos resistencias en serie, que proporcionan entre un terminal extremo y el intermedio una tensión menor que la total aplicada, dependiente del valor de las resistencias. La figura 9b) representa un divisor de intensidad. Son dos resistencias en paralelo. La intensidad por cada una es menor que la total y depende del valor de las resistencias. Demostrar que

$$v_2 = v\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{y que} \quad i_2 = i\frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Hallar v_1 e i_1. Comprobar que $v_1+v_2=v$ y que $i_1+i_2=i$.

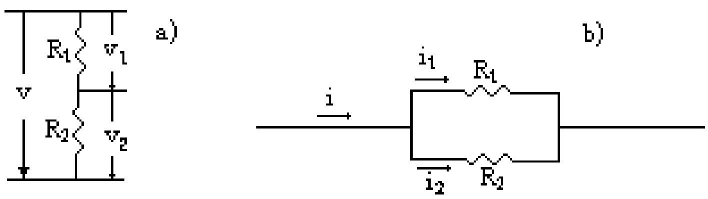

Fig. 9.- a) Divisor de tensión. b) Divisor de intensidad.

Solución:

a).- La intensidad por las dos resistencias en serie es $i=v/(R_1+R_2)$.

$$v_2 = R_2 i = v\frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad v_1 = v\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_1 + v_2 = v\frac{R_2}{R_1 + R_2} + v\frac{R_1}{R_1 + R_2} = v$$

b) La tensión en los terminales de las dos resistencias en paralelo es $v=iR_1R_2/(R_1+R_2)$.

$$i_2 = \frac{v}{R_2} = i\frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad i_1 = \frac{v}{R_1} = i\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_1 + i_2 = i\frac{R_1}{R_1 + R_2} + i\frac{R_2}{R_1 + R_2} = i$$

10.- En muchas ocasiones se solicita de los generadores eléctricos que su tensión varíe poco con la potencia que suministran. Un parámetro para comparar la calidad de los generadores desde este punto de vista es el llamado *regulación* R, que se define así para los generadores de corriente continua:

$$R = \frac{V_0 - V_n}{V_n},$$

donde V_0 es la tensión del generador cuando la intensidad es nula, es decir, a circuito abierto[12]; y V_n es la tensión con una determinada carga[13]. Cuanto más se aleje la tensión en carga de la tensión en vacío, mayor es la regulación y peor es el generador desde este punto de

[12] Las expresiones a *circuito abierto*, *sin carga* y *en vacío*, aplicadas a un generador son equivalentes.

[13] En el lenguaje de la Electrotecnia *carga* significa la potencia que entrega un generador, aunque también, a veces, por abuso de lenguaje, designa el receptor que la absorbe.

vista; por eso se dice de la regulación que es un factor de demérito o de falta de calidad. Demostrar que la regulación R de un generador de corriente continua de resistencia interna r que tiene conectado como único receptor una resistencia R_t vale r/R_t.

Solución:

$$R = \frac{V_0 - V_n}{V_n} = \frac{e - V_n}{V_n} = \frac{V_n + r\,i - V_n}{R_t i} = \frac{r\,i}{R_t i} = \frac{r}{R_t}.$$