5. Conductores en equilibrio electrostático

Félix Redondo Quintela y Roberto Carlos Redondo Melchor
Universidad de Salamanca

Conductores en equilibrio electrostático

Definición.- *Un conductor está en equilibrio electrostático si la densidad de corriente en todos sus puntos vale cero.*

El campo eléctrico en el interior de un conductor isótropo en equilibrio electrostático vale cero, pues como,

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}.$$

Si está en equilibrio electrostático, $\boldsymbol{j}=\mathbf{0}$ sin que σ lo sea, por lo que $\boldsymbol{E}=\mathbf{0}$[1].

En un conductor isótropo en equilibrio electrostático *el potencial es uniforme*, o sea, vale lo mismo en todos sus puntos, pues

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{j}-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{k}=-0\boldsymbol{i}-0\boldsymbol{j}-0\boldsymbol{k}$$

de donde V resulta independiente de x, y, z. De aquí que pueda hablarse del *potencial de un conductor* en equilibrio electrostático, que es el potencial de cualquiera de sus puntos.

Tendencia al equilbrio electrostático

Imagínese que, por una redistribución de carga libre, o por haber añadido carga, en una región de un conductor isótropo y homogéneo respecto a la conductividad, la densidad de carga sea $\rho \neq 0$ en algún punto. En ρ está incluida toda la carga, la libre, la añadida y la de los iones fijos. Supongamos que en $t = 0$ cesan las fuerzas que mantenían esa aglomeración de carga, de forma que la única fuerza sobre todas las cargas es la debida al campo electrostático $\boldsymbol{E}$ que exista, que es la suma del creado por todas las cargas, interiores fijas y móviles, y cualquier otro campo electrostático de origen externo o interno que pueda existir. Como el campo total es electrostático, se cumple en cada punto la ley de Gauss:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho \qquad (44)$$

De ella se obtiene

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (45)$$

También se cumple la ecuación de continuidad

---

1 En un conductor anisótropo pueden existir direcciones en las que no puedan moverse las cargas libres. Un campo no nulo en esa dirección no produciría corriente. Es decir, el conductor estaría en equilibrio electrostático sin que el campo en su interior fuera cero.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (46)$$

Para conductores isótropos, sustituyendo en ella la ley de Ohm,

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \qquad (47)$$

Y como la conductividad es uniforme, la (46) se transforma en

$$\sigma \nabla \cdot \boldsymbol{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (48)$$

Sustituyendo en ella la ley de Gauss en forma puntual, queda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \qquad (49)$$

Fijado el punto en el que se halla la densidad de carga, ρ solo depende del tiempo, de forma que la ecuación en derivadas parciales se transforma en ordinaria:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \sigma \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \qquad (50)$$

que puede escribirse con las variables separadas:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathrm{d}t \qquad (51)$$

Integrando se obtiene

$$\ln \rho - \ln k = -\frac{\sigma}{\varepsilon} t\,; \qquad \ln \frac{\rho}{k} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} t \qquad (52)$$

o sea,

$$\rho = k\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \qquad (53)$$

Si llamamos ρ_0 a la densidad de carga en t=0, resulta que k=ρ_0; por tanto,

$$\rho = \rho_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \qquad (54)$$

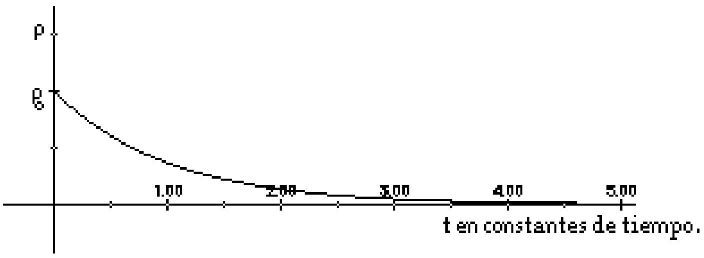

Fig. 1.- La densidad de carga en un punto de un conductor decae a cero cuando cesa la causa que provocó la aglomeración. Cuando ha transcurrido un tiempo mayor que cinco veces la constante de tiempo la densidad es ya muy próxima a cero.

Como se ve, si el único campo en un conductor isótropo es electrostático, la densidad de carga en cada punto decrece exponencialmente a partir del valor inicial, hasta anularse. Resulta, pues, que la carga libre tiende a distribuirse hasta que la densidad volúmica de carga es nula en todos los puntos.

$\varepsilon / \sigma = \tau$, se llama *constante de tiempo* o *constante de relajación*. Tiene dimensiones de tiempo[2] y, cuanto mayor sea su valor, más tarda la densidad de carga en aproximarse a cero. En la práctica, cuando ha transcurrido un tiempo mayor que cinco veces la constante de relajación se considera que la densidad de carga es cero. La resistividad del cobre es $1.72\ \mu\Omega \cdot \text{cm} = 1.72 \times 10^{-8}\,\Omega\text{m}$ y la permitividad próxima a la del vacío, por lo que la constante de relajación es

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} = 1.72 \times 10^{-8} \times 9 \times 10^{-12} \cong 10^{-19}\text{s}$$

Del orden de 10^{-19}s. Es decir, transcuridos más de $5 \times 10^{-19} \cong 10^{-18}$s la densidad prácticamente se ha anulado, un proceso que puede considerarse instantáneo para la mayor parte de las aplicaciones usuales. Se obtienen parecidos órdenes de magnitud para las constantes de tiempo del resto de los metales. Sin embargo, para un buen aislante como la mica, cuya resistividad es del orden de $10^{15}\Omega\text{m}$ y $\varepsilon_r \cong 6$, la constante de relajación es casi 15 horas, lo que significa que hasta que no transcurre un tiempo mayor que $15 \times 5 = 75$ horas, más de 3 días, no se anula la densidad de carga. Nótese que esta anulación de la densidad de carga solo se produce si existe carga libre, que es la que se redistribuye para anular la densidad de carga en todos los puntos.

Si en (54) $\rho_0 = 0$, la densidad permenece siempre igual a cero, lo que significa que, si solo existen campos electrostáticos en un conductor, es imposible conseguir que exista una densidad volúmica de carga distinta de cero en ningún punto de su interior.

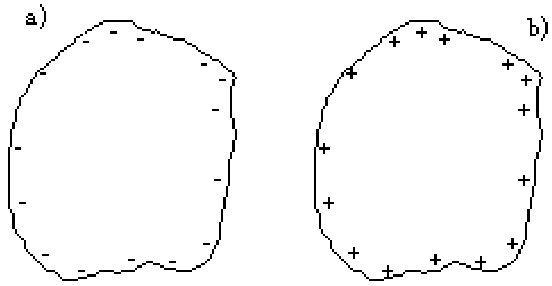

Fig. 2- a) Un conductor cargado negativamente. c) Un conductor cargado positivamente.

¿Quiere decir lo anterior que un conductor no puede cargarse de electricidad? Si se añaden electrones libres a un trozo de material que está en estado neutro, estos electrones tenderán a dispersarse para mantener nula la densidad de carga, para lo que tienden a alejarse entre sí indefinidamente. Sin embargo, al llegar a la superficie límite del cuerpo, a la frontera que lo separa del vacío, del aire o del medio en que se encuentre inmerso el conductor, los electrones son, en general, retenidos. Si no fuera así, los electrones se alejarían indefinidamente, como ocurriría si, en el vacío, soltamos

---

2 $\dfrac{\dfrac{C^2}{Nm^2}}{\dfrac{S}{m}} = \dfrac{C^2\Omega}{Nm} = \dfrac{C^2 V}{JA} = \dfrac{C^2 \dfrac{J}{C}}{JA} = \dfrac{As}{A} = s$.

un conjunto de ellos y los abandonamos exclusivamente a su propio campo: se separarían alejándose hasta el infinito empujados por su propia fuerza de repulsión. Pero un trozo de material sí se puede cargar de electricidad; lo que ocurre es que, si hay carga libre, el exceso de carga se sitúa en la superficie y se reparte de forma que la densidad volúmica de carga en cualquier punto interior sea cero. En los malos conductores (conductividad pequeña) esta huida hacia la superficie exterior es más lenta que en los buenos conductores, pero al final la carga añadida se sitúa en la superficie (fig. 2), y el conductor vuelve al equlilibrio electrostático.

Teorema de Faraday

<u>Teorema</u>.- *Sea un conductor en equilibrio electrostático. Si en un hueco cerrado de él existe una carga q, en la superficie entre el conductor y el hueco existe una carga -q.*

<u>Demostración</u>.- El flujo a través de una superficie cerrada interior al conductor que rodea al hueco (de trazos en la fig, 3a) es cero, porque, debido al equilibrio, el campo en el interior del conductor es cero. Por tanto, por la ley de Gauss, la carga total encerrada por esa superficie también es cero. Como en el interior del conductor (parte rayada) no existe carga, sólo puede existir en la superficie del conductor que limita al hueco. Su valor debe ser -*q* para que la suma total en el volumen limitado por la superficie de Gauss sea cero. Y el teorema está demostrado.

Si el conductor estaba en estado neutro, debe aparecer otra carga *q* en la superficie exterior (fig. 3b). Estas cargas de las superficies del conductor se llaman cargas *inducidas* por la carga situada en el hueco.

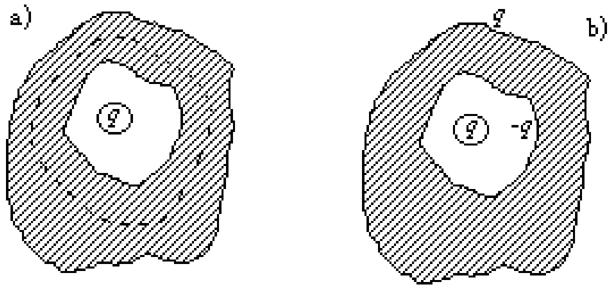

Fig. 3- Una carga *q* en un hueco de un conductor induce otra -*q* en la superficie interna yotra q enla externa.

Se deduce que, si la carga en el hueco es cero, también lo es en la superficie entre el conductor y el hueco.

Siempre que un conductor cargado con una carga *q* induce en otro exactamente la carga -*q*, se dice que entre los dos conductores existe *influencia total*. Como muestra el teorema de Faraday, siempre que un conductor rodea a otro existe entre ellos influencia total.

Teorema de Coulomb

Teorema.- *El campo eléctrico en un punto inmediatamente exterior a un conductor en equilibrio electrostático es perpendicular a su superficie límite y su módulo vale*

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Donde ε es la permitividad del medio que rodea al conductor.

Demostración.- El teorema de Coulomb es un caso particular de las condiciones en la frontera entre dos medios: la componente tangencial del campo es continua en la frontera,

$$E_{1t} = E_{2t}$$

y la normal a la frontera se deduce de

$$\varepsilon_2 E_{2\mathrm{n}} - \varepsilon_1 E_{1\mathrm{n}} = \sigma$$

Si el medio 1 es un conductor en equilibrio electrostático, $\boldsymbol{E}_1 = \mathbf{0}$, por lo que

$$E_{1t} = E_{1n} = 0$$

y

$$E_{2\mathrm{n}} = \frac{\sigma + \varepsilon_1 E_{1\mathrm{n}}}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

Es decir, solo existe componente normal a la superficie. Y el teorema está demostrado.

Obsérvese que el campo

$$E_{2\mathrm{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

es la suma de cualquier campo electrostático en el conductor: del creado por la carga $\sigma\,\mathrm{d}S$, por la del resto de la superficie del conductor y por cualquier otra carga externa, incluida la de polarización del medio 2.

Si $\sigma = 0$, el campo en un punto exterior muy próximo a la superficie también es cero, aunque haya otras cargas creadoras de campo en la región.

Como en todos los puntos interiores de un conductor en equilibrio electrostático el campo es nulo, resulta que en $\dfrac{\partial V_1}{\partial n} = 0$. De $\left(-\varepsilon_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial n} + \varepsilon_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial n}\right) = \sigma$ resulta que $-\varepsilon_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial n} = \sigma$, y $\dfrac{\partial V_2}{\partial n} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_2}$. Es decir, si $\sigma \neq 0$, la derivada del potencial en la dirección normal a la superficie del conductor es discontinua, pero no se olvide que V es funcioón continua de x, y, z, por lo que el potencial de un punto exterior al conductor muy próximo a su superficie es el mismo que el potencial del conductor.

Presión electrostática

Sea $\mathrm{d}S$ de la superficie límite de un conductor cargado. $\sigma\,\mathrm{d}S$ es, su carga. El campo electrostático originado por las demás cargas, incluidas las del resto de la superficie del conductor, origina una fuerza sobre las de $\mathrm{d}S$, que pretendemos evaluar. Consideremos un punto A inmediatamente exterior a $\mathrm{d}S$ y otro, B, inmedatamente interior. En ambos puntos el campo tiene dos componentes: $\boldsymbol{E}_1$, creada exclusivamente por la carga de $\mathrm{d}S$, que tiene el mismo módulo en A que en B. Esta componente es perpendicular a $\mathrm{d}S$ y tiene sentido opuesto en B al que tiene en A. Otra componente es la creada por todas las demás cargas, de valor $\boldsymbol{E}_2$, el mismo en A que en B, ya que la distancia entre los dos es tan pequeña como se quiera, y de valor tal que anula al campo en B, por lo que tiene el mismo módulo que $\boldsymbol{E}_1$, es decir,

$$E_1 = E_2$$

pero en A,

$$E_1 + E_2 = 2E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Por lo que, en un punto B infinitamente próximo a $\mathrm{d}S$, el resto de las cargas crea un campo perpendicular a $\mathrm{d}S$ de módulo

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

donde σ es la densidad superficial de carga en $\mathrm{d}S$ y ε la permitividad del medio que rodea al conductor. El campo tiene sentido hacia el exterior si σ es positiva, y hacia el interior si es negativa.

Fig. 4.- Los puntos A y B son tan próximos como se quiera, pero A esterior y B interior a la superficie del conductor.

Por tanto, la fuerza sobre $\mathrm{d}S$ vale

$$\mathrm{d}F = E_2\,\mathrm{d}q = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\,\mathrm{d}S$$

Y la presión electrostática

$$p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}$$

Como $\sigma = E\varepsilon$, donde E es el campo en un punto inmediatamente exterior al conductor,

$$p = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Campo en las puntas

Supongamos dos esferas conductoras cargadas, en equilibrio electrostático, de radios R_1 y R_2, separadas la distancia suficiente para que el campo eléctrico de la una en la otra sea despreciable. Tampoco existen otros campos eléctricos en la región. Para que tengan el mismo potencial V se las une con un hilo conductor. Por simetría, la carga se reparte uniformemente en cada superficie límite, de forma que las densidades superficiales de carga, σ_1 y σ_2 son uniformes. Por tanto el potencial de cada esfera vale

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R_1^2\sigma_1}{R_1} = \frac{R_1\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R_2^2\sigma_2}{R_2} = \frac{R_2\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

Igualando los últimos miembros se obtiene

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Es decir, la densidad superficial de carga de dos esferas conductoras que tienen el mismo potencial es inversamente proporcional a su radio. Por tanto, las densidad de carga en las superficies puntiagudas de los conductores es mucho mayor que en el resto; y como el campo en un punto próximo exterior vale

$$E_{en} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

pueden conseguirse campos intensos fabricando conductores puntiagudos. Esta propiedad es la base de los pararrayos.

Pararrayos

Las corrientes ascendentes de aire caliente con vapor de agua, que ocurren principalmente en tiempo caluroso, suelen cargarse por frotamiento y producir nubes con carga eléctrica. La carga del suelo es inducida por la nube y, por tanto, de signo opuesto a la de ella. Las cargas del suelo hacen que iones intermedios y los de la nube sean atraídos hacia la tierra y los negativos hacia la nube. Esta corriente eléctrica entre la nube y la tierra es moderada por la resistencia a que dan lugar los choques de estas cargas con el resto de las moléculas del aire, por la resistencia del aire. Pero, por mecanismos aún no muy claros, en ocasiones se originan avalanchas de partículas cargadas que, si el campo eléctrico es elevado, pueden alcanzar gran velocidad y iniozar las moléculas de aire con las que chocan. Se aumenta así el número de cargas libres y el aire aumenta su conductividad a lo largo de una trayectoria entre la nube cargada y la tierra. Por esa trayectoria fluyen, entonces, gran cantidad de iones entre la nube y la tierra, que provocan el calentamiento del aire de la trayectoria, que se hace, por eso, visible durante un corto tiempo. Esa trayectoria visible se llama rayo[3]. Por tanto, un rayo es una trayectoria de descarga rápida. Al descargarse por ella parte de la nube, el campo disminuye y, por tanto, también la velocidad de los iones, y el rayo,

---

[3] En Joseph R. Dwyer, *El rayo*, Investigación y Ciencia, julio 2005, se exponen hipótesis sobre la generación de los rayos.

es decir, la trayectoria visible, desaparece. El rayo produce luz momentánea, que es visible incluso aunque no se vea el rayo. Esa luz se llama relámpago. También produce calentamiento del aire próximo con expansiones y explosiones que, con sucesivos ecos, son el trueno.

Si una parte de un edificio, un árbol o una persona forman parte de la trayectoria del rayo, pueden ser dañados por calentamiento excesivo o por otras causas. Para la proteción de los edificios y de las personas se instalan pararrayos, que son conductores en forma de barra bien puesta a tierra, terminada en punta o en un conjunto de puntas. Se colocan en las partes más altas de los edificios y desde ellos se baja un cable conductor, que se pone a tierra. Así, la punta del pararrayos tiene el potencial de tierra. De esa manera se disminuye la distancia de la nube a un punto de potencial cero, por lo que se aumenta la probabilidad de que el pararrayos y el cable que lo conecta con tierra sean un camino de descarga. De esta manera se disminuye la probabilidad de que el camino sea otro próximo.

Problemas

1.- Un conductor cilíndrico de radio a, en equilibrio electrostático, tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. Hallar el campo eléctrico que crea en el aire en un punto exterior P que dista R de su eje, y en un punto exterior muy próximo al conductor. Si se toma como referencia de potenciales un punto exterior que dista R_0 del eje del cilindro, hallar el potencial de cualquier punto y el del conductor.

Solución:

Como el conductor está en equilibrio, el campo en su interior es cero.

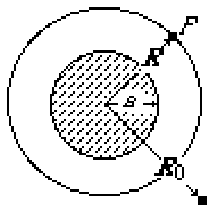

Fig- 1.- Sección recta del conductor.

Como el campo en el exterior es radial, si se aplica la ley de Gauss a una superficie cilíndrica concéntrica con el conductor, externa a él, de bases perpendiculares a su eje y de longitud L, se tiene:

$$2\pi RLE = \frac{2\pi aL\sigma}{\varepsilon_0}; \qquad E = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 R}$$

Vectorialmente,

$$\boldsymbol{E} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{R}$$

R es el vector del plano perpendicular al conductor que contiene el punto P, que va del eje del conductor al P.

En un punto exterior muy próximo a la superficie $R \to a^+$, por lo que

$$E_a = \lim_{R \to a^+} E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

que es el teorema de Coulomb.

En la dirección de R,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = -E \,;\ \mathrm{d}V = -E\mathrm{d}R \,;\ \int_{V_0}^{V} \mathrm{d}V = V - V_0 = -\int_{R_0}^{R} E\mathrm{d}R = \int_{R}^{R_0} E\mathrm{d}R$$

$$V - V_0 = \int_{R}^{R_0} \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 R}\mathrm{d}R = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\left[\ln R\right]_R^{R_0} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_0}{R}$$

Si $V_0 = 0$,

$$V = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_0}{R}\,.$$

Fórmula que da el potencial de un punto exterior que dista R del eje del cilindro, si el potencial cero se sitúa en un punto exterior que dista R_0. Nótese que las superficies equipotenciales son superficies cilíndricas de eje el del conductor. Si σ es positiva, V es positivo en los puntos que disten del eje del conductor menos que R_0, y negativo en los puntos que disten más que R_0.

2.- Deducir una fórmula que proporcione el campo eléctrico y el potencial en el punto P del problema anterior en función del potencial del conductor.

Solución:

Como el potencial en la frontera de un conductor es una función continua de las coordenadas x, y, z, el potencial del conductor debido a su propia carga es el de un punto de su superficie, es decir,

$$V(a) = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0} ln\frac{R_0}{a}$$

Despejando la densidad superficial de carga y sustituyendo, se tiene:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V(a)}{a\ln\dfrac{R_0}{a}}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{R} = \frac{V(a)}{R^2\ln\dfrac{R_0}{a}}\boldsymbol{R}$$

$$V = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_0}{R} = V(a)\frac{\ln\dfrac{R_0}{R}}{\ln\dfrac{R_0}{a}}$$

$V(a)$ es el potencial del conductor debido solo a su propia carga.

3.- Sea el plano que contiene al punto P y es perpendicular al conductor del problema anterior. Situemos el origen de coordenadas O en ese plano. Todos los vectores que se citan a continuación son vectores de ese plano. $\boldsymbol{r}_1$ es el vector de posición del eje del conductor, $\boldsymbol{r}$ el de posición de P y $\boldsymbol{r}_0$ el del origen de potenciales. Hallar las fórmulas del campo y del potencial en función de esos vectores. Particularizar si el origen de potenciales y el de coordenadas coinciden.

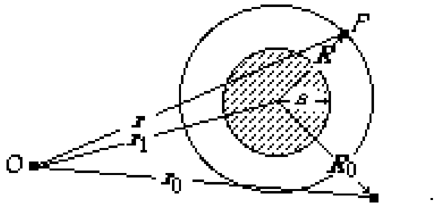

Fig. 2.

Solución:

Como $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{R_0} = \boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}_1$, se tiene:

$$\boldsymbol{E} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = \frac{V(a)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^2 \ln \frac{|\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}_1|}{a}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$$

$$V = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{|\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} = V(a)\frac{\ln\frac{|\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}}{\ln\frac{|\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}_1|}{a}}$$

Si el origen de potenciales está en el de coordenadas, $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0}$, con lo que

$$\boldsymbol{E} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = \frac{V(a)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^2 \ln \frac{r_1}{a}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$$

$$V = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} = V(a)\frac{\ln\frac{r_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}}{\ln\frac{r_1}{a}}$$

$V(a)$ es el potencial del conductor debido solo a su propia carga.

4.- Hallar el campo y el potencial que tres conductores cilíndricos muy largos, paralelos, de radios iguales de valor a crean en un punto P externo a ellos. Los potenciales de los conductores respecto al origen de coordenadas son V_1, V_2 y V_3. Suponer densidades superficiales de carga uniformes. La figura es el corte por un plano perpendicular a los conductores.

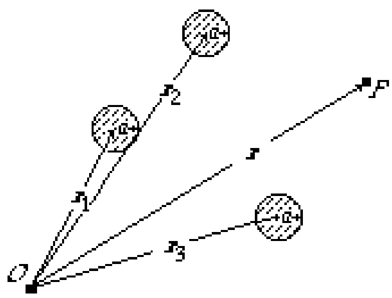

Fig. 3.

Solución:

El campo que el conductor 1 crea en P es

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$$

σ_1 es la densidad superficial de carga del conductor 1. De la misma manera para el resto de los conductores. Por tanto

$$\boldsymbol{E}=\frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)+\frac{a\sigma_2}{\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)+\frac{a\sigma_3}{\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3)$$

El potencial que crea en P el conductor 1 es

$$V_{P1}=\frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

De la misma manera para los otros dos conductores. Por tanto,

$$V=\frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{a\sigma_2}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}+\frac{a\sigma_3}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_3}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3|}$$

Si $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+a\dfrac{\boldsymbol{r}_1}{r_1}$, entonces $V=V_1$. Es decir,

$$V_1=\frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{a}+\frac{a\sigma_2}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{\left|\boldsymbol{r}_1+a\dfrac{\boldsymbol{r}_1}{r_1}-\boldsymbol{r}_2\right|}+\frac{a\sigma_3}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_3}{\left|\boldsymbol{r}_1+a\dfrac{\boldsymbol{r}_1}{r_1}-\boldsymbol{r}_3\right|}$$

Si $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+a\dfrac{\boldsymbol{r}_2}{r_2}$, entonces $V=V_2$:

$$V_2=\frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{\left|\boldsymbol{r}_2+a\dfrac{\boldsymbol{r}_2}{r_2}-\boldsymbol{r}_1\right|}+\frac{a\sigma_2}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{a}+\frac{a\sigma_3}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_3}{\left|\boldsymbol{r}_2+a\dfrac{\boldsymbol{r}_2}{r_2}-\boldsymbol{r}_3\right|}$$

Si $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_3+a\dfrac{\boldsymbol{r}_3}{r_3}$, $V=V_3$:

$$V_3 = \frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{\left|\boldsymbol{r}_3 + a\dfrac{\boldsymbol{r}_3}{r_3} - \boldsymbol{r}_1\right|} + \frac{a\sigma_2}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{\left|\boldsymbol{r}_3 + a\dfrac{\boldsymbol{r}_3}{r_3} - \boldsymbol{r}_2\right|} + \frac{a\sigma_3}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_3}{a}$$

Si el radio de los conductores es despreciable comparado con las distancias entre los conductores, se tiene:

$$V_1 = \frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{a} + \frac{a\sigma_2}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{d_{12}} + \frac{a\sigma_3}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_3}{d_{13}}$$

$$V_2 = \frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{d_{12}} + \frac{a\sigma_2}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{a} + \frac{a\sigma_3}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_3}{d_{23}}$$

$$V_3 = \frac{a\sigma_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{d_{13}} + \frac{a\sigma_2}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{d_{23}} + \frac{a\sigma_3}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_3}{a}$$

Donde d_{12} es la distancia entre los ejes de los conductores 1 y 2, y así para el resto. Si

$$p_{hh} = \frac{a}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_h}{a}$$

y

$$p_{hk} = \frac{a}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_k}{d_{hk}},$$

se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

O bien

$$[V] = [p][\sigma]$$

V_1, V_2 y V_3 son los potenciales respectivos de los conductores, y σ_1, σ_2 y σ_3 las densidades superficiales de carga.

Si

$$g_1 = \frac{a}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}$$

$$g_2 = \frac{a}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|}$$

$$g_3 = \frac{a}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_3}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_3|}$$

El potencial V del punto P, obtenido más arriba, se puede poner así:

$$V = [g]^T[\sigma],$$

donde $[g]^T = [g_1 \quad g_2 \quad g_3]$ es la tanspuesta de la matriz

$$[g] = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

Como

$$[\sigma] = [p]^{-1}[V],$$

resulta que

$$V = [g]^T[\sigma] = [g]^T[p]^{-1}[V]$$

5.- Un conductor cilíndrico de cobre de radio a=2.5 cm está rodeado de otro conductor concéntrico con él de radio interior b=10 cm. Un dieléctrico lineal de coeficiente dieléctrico ε_r=3 llena el espacio entre los dos. Hallar la polarización del dieléctrico, el vector desplazamiento y las densidades de carga de polarización cuando la diferencia de potencial entre el conductor interior y el exterior vale V=100 V. Comprobar explícitamente que la carga total de polarización vale cero.

Solución:

El módulo del campo eléctrico en un punto del dieléctrico que dista r del centro vale

$$E = \frac{V}{r \,\mathrm{Ln}\dfrac{b}{a}}$$

Y tiene la dirección del radio y sentido hacia fuera. Por tanto el módulo de la polarización vale

$$P = \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{V}{\rho \,\mathrm{Ln}\dfrac{b}{a}} \cong \frac{1.2774 \times 10^{-9}}{r}$$

con la misma dirección y el mismo sentido que el campo eléctrico. Si se sustituye r en metros, P se obtiene en C/m^2.

El módulo del vector desplazamiento vale

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{V}{\rho \,\mathrm{Ln}\dfrac{b}{a}} \cong \frac{1.9161 \times 10^{-9}}{\rho}$$

También con la dirección del radio y sentido hacia fuera. Si se sustituye r en metros, D se obtiene en C/m^2. La densidad volúmica de carga de polarización vale[4]

[4] La divergencia en coordenadas cilíndricas es div $\boldsymbol{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r P_{\mathrm{r}})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_q}{\partial \theta} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$.

$$\rho_p = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(rP)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)\frac{V}{\mathrm{Ln}\dfrac{b}{a}}\right) = 0$$

La densidad superficial de carga de polarización es el opuesto del valor de la polarización en la superficie interior, y el valor de la polarización en la superficie exterior del dieléctrico, pues $\boldsymbol{P}$ es perpendicular a las dos superficies:

$$\sigma_{pa} = -P(a) = -\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{V}{a\mathrm{Ln}\dfrac{b}{a}} \cong -5.1096\times10^{-10}\,\mathrm{C/m^2} = -51.096\ \mathrm{nC/m^2}$$

$$\sigma_{pb} = P(b) = \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{V}{b\,\mathrm{Ln}\dfrac{b}{a}} \cong 1.2774\times10^{-10}\mathrm{C/m^2} = 12.774\ \mathrm{nC/m^2}$$

La carga total de polarización en una longitud L del cable vale

$$Q_p = \int_\mathrm{v}\rho_p\mathrm{d}v + \int_{S_a}\sigma_{pa}\mathrm{d}S + \int_{S_b}\sigma_{pb}\mathrm{d}S = \sigma_{pa}2\pi aL + \sigma_{pa}2\pi bL =$$

$$-\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)\frac{2\pi aLV}{a\,\mathrm{Ln}\dfrac{b}{a}} + \varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)\frac{2\pi bLV}{b\,\mathrm{Ln}\dfrac{b}{a}} = 0$$

Trabajo sobre pararrayos

Tipos, legislación (leyes, reglamentos y normas), instalación, superficie que protege...