

7 Energía electrostática

Félix Redondo Quintela y Roberto Carlos Redondo Melchor
Universidad de Salamanca

Energía electrostática de una distribución de carga eléctrica

Hasta ahora hemos supuesto distribuciones de carga, pero no hemos considerado la energía necesaria para formarlas. Se llama *energía electrostática de una distribución de carga eléctrica* al trabajo que hay que realizar para trasladar esa carga desde regiones de potencial cero al lugar que ocupa en la distribución, supuesto que no hay más campo eléctrico que el que crea la carga de la distribución. Ese trabajo coincide con el que realizarían las fuerzas electrostáticas de la propia distribución, si se permitiera que se dispersara su carga para volver a su situación inicial.

En lo que sigue, supondremos que el medio en el que se sitúa la distribución es un dieléctrico lineal y homogéneo respecto a la permitividad ϵ , que llena todo el espacio, y que su densidad de carga es inicialmente nula en todos sus puntos, por lo que el campo eléctrico también es inicialmente cero en todos los puntos del dieléctrico. Supondremos el origen de potenciales en el infinito¹.

Energía electrostática de una distribución de cargas puntuales

Para traer una carga puntual q_1 desde el infinito a un punto cuyo vector de posición es r_1 , no hay que realizar trabajo, pues, según las hipótesis de partida expuestas en el apartado anterior, el valor del campo eléctrico es cero en todos los puntos, y la fuerza sobre q_1 es, por tanto, cero. Si ahora se trae la carga q_2 desde el infinito hasta el punto r_2 , el trabajo que hay que realizar es

$$W_2 = q_2 V_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

donde²

$$V_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r_{12}}$$

es el potencial del punto que va a ocupar la carga q_2 , que solo está creado por la carga q_1 . $r_{12} = |r_1 - r_2|$ es la distancia entre los puntos que ocupan las cargas q_1 y q_2 . Si a continuación traemos la carga q_3 al extremo de r_3 , el trabajo necesario vale

$$W_3 = q_3(V_{13} + V_{23}) = q_3 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_2}{r_{23}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

donde

¹ Según lo ya visto, el potencial que una carga puntual q crea en un punto situado a una distancia R de ella en el vacío es $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} + C$, donde C es el potencial del infinito. Por tanto, asignar potencial cero al infinito es hacer $C = 0$. Si el medio es un dieléctrico, ϵ_0 debe sustituirse por la permitividad ϵ del dieléctrico.

² El trabajo W_2 se realiza en contra del campo eléctrico. El trabajo que realiza el campo es $q_2(V_1 - V_2) = q_2(0 - V_2) = -q_2 V_2 = -W_2$.

$$V_{13} + V_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_2}{r_{23}}$$

es el potencial que las cargas q_1 y q_2 crean en el extremo de r_3 . De la misma forma, si se acerca a continuación la carga q_4 hasta el punto r_4 , el trabajo vale

$$\begin{aligned} W_4 &= q_4(V_{14} + V_{24} + V_{34}) = q_4 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r_{14}} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_3}{r_{34}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right) \end{aligned}$$

donde

$$V_{14} + V_{24} + V_{34} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r_{14}} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_3}{r_{34}}$$

es el potencial creado por las cargas q_1 , q_2 y q_3 en el punto r_4 . Y así sucesivamente. El trabajo para traer la carga q_n al punto r_n es

$$W_n = q_n(V_{1n} + V_{2n} + \dots + V_{(n-1)n}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q_1 q_n}{r_{1n}} + \frac{q_2 q_n}{r_{2n}} + \dots + \frac{q_{(n-1)} q_n}{r_{(n-1),n}} \right)$$

El trabajo total realizado para traer las n cargas es la suma de los anteriores:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) + \left(\frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{q_1 q_n}{r_{1n}} + \frac{q_2 q_n}{r_{2n}} + \dots + \frac{q_{(n-1)} q_n}{r_{(n-1),n}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \dots + \frac{q_1 q_n}{r_{1n}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_2 q_5}{r_{25}} + \dots + \frac{q_2 q_n}{r_{2n}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{q_3 q_4}{r_{34}} + \frac{q_3 q_5}{r_{35}} + \frac{q_3 q_6}{r_{36}} + \dots + \frac{q_3 q_n}{r_{3n}} \right) + \dots + \left(\frac{q_{(n-1)} q_n}{r_{(n-1),n}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[q_1 \left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \frac{q_4}{r_{14}} + \dots + \frac{q_n}{r_{1n}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + q_2 \left(\frac{q_3}{r_{23}} + \frac{q_4}{r_{24}} + \frac{q_5}{r_{25}} + \dots + \frac{q_n}{r_{2n}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + q_3 \left(\frac{q_4}{r_{34}} + \frac{q_5}{r_{35}} + \frac{q_6}{r_{36}} + \dots + \frac{q_n}{r_{3n}} \right) + \dots + q_{n-1} \left(\frac{q_n}{r_{(n-1),n}} \right) \right] \end{aligned}$$

De forma resumida,

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{q_h q_k}{r_{hk}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{h=1}^n q_h \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{q_k}{r_{hk}} \quad (1)$$

El factor 1/2 se debe a que el sumatorio hace aparecer dos veces en lugar de una el producto de cada carga por las otras.

Esta es la fórmula más útil para hallar la energía electrostática de una distribución de cargas puntuales. Se puede obtener otra equivalente así: el potencial que todas las cargas de la distribución excepto q_h crean en el punto que ocupa q_h vale

$$V_h = \sum_{k \neq h}^n \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_k}{r_{kh}} \quad (2)$$

Por tanto, para traer la carga q_h desde el infinito, de potencial cero, hasta ese punto, el trabajo vale

$$W'_h = q_h V_h = q_h \sum_{k \neq h}^n \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_k}{r_{kh}} \quad (3)$$

Poniendo (1) como

$$W = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n q_h \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_k}{r_{hk}},$$

se ve que

$$W = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n q_h V_h \quad (4)$$

(3) da el trabajo que hay que realizar para llevar la carga puntual q_h desde el infinito al punto que ocupa en la distribución, pero suponiendo que las $n-1$ cargas restantes están ya en su lugar. Si ese trabajo se halla de la misma forma para todas las n cargas, la fórmula (4) expresa que la energía de la distribución es la semisuma de todos esos trabajos.

La (1) muestra que la energía electrostática de una distribución de carga es inversamente proporcional a la permitividad ϵ . Es así porque el campo que crean las cargas en un dieléctrico es menor que en el vacío, por lo que en un dieléctrico hay que realizar menos trabajo que en el vacío para acercar las cargas a su lugar.

Energía de una distribución continua de carga

Sea $dq = \rho dv$ la carga de un volumen dv de una distribución continua de carga en un medio dieléctrico lineal y homogéneo, de superficie límite en el infinito, y V el potencial en dv . V está creado por toda la carga no contenida en dv . Según (4), la energía de la distribución es

$$W = \frac{1}{2} \int_q V dq = \frac{1}{2} \int_v V \rho dv \quad (5)$$

De forma similar, para distribuciones superficiales o lineales de densidades σ y λ .

$$W = \frac{1}{2} \int_q V dq = \frac{1}{2} \int_S V \sigma dS \quad (6)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_q V dq = \frac{1}{2} \int_L V \lambda dL \quad (7)$$

Por ejemplo, si se tiene un único conductor en equilibrio electrostático con una carga q , la energía de esa distribución de carga es

$$W = \frac{1}{2} \int_q V dq = \frac{1}{2} V \int_q dq = \frac{1}{2} qV \quad (8)$$

W se llama energía electrostática de ese conductor. V es el potencial que la carga del conductor crea en los puntos del conductor. V sale fuera de la integral en la fórmula porque el potencial de un conductor en equilibrio electrostático es uniforme.

(8) puede servir para hallar la energía que almacena un condensador en una red eléctrica. En las redes eléctricas los generadores pasan electrones libres de una placa a otra de cada condensador, de forma que si la carga de una placa es q , la de la otra es su opuesta, $-q$. Si se toma la placa con carga negativa como origen de potenciales, cargar un condensador consiste en llevar la carga q desde el origen de potenciales hasta la placa positiva, de potencial V . La energía electrostática es la del conductor que constituye la placa positiva:

$$W_C = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2$$

V es la diferencia de potencial entre la placa positiva y la negativa. Se ha tenido en cuenta que $q = CV$.

Si la distribución consiste en n únicos conductores, al aplicar (5) su energía resulta

$$W = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n q_h V_h$$

Cada V_h es el potencial del conductor h respecto a una referencia común. V_h está creado por la propia carga del conductor h y la del resto de conductores.

Si la distribución está formada por carga con densidad ρ en cada punto además de n conductores, la energía es

$$W = \frac{1}{2} \int_v V \rho \, dv + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n q_h V_h$$

V es el potencial creado en el volumen infinitesimal dv por el resto de la distribución y por la carga de los conductores. V_h es el potencial de cada punto del conductor h , que es uniforme. V_h está creado por la carga del propio conductor h , la del resto de los conductores y por la carga distribuida en el dieléctrico, de densidad ρ .

En la fórmula (5) V es el potencial en el volumen infinitesimal dv creado por la carga no contenida en dv . ρ es la densidad de carga en dv . Por eso, si se varía el volumen v añadiendo o quitando volúmenes en cuyos puntos la densidad de carga sea cero, esos incrementos de volumen no contribuyen a la integral de la energía, pues en todas esas partes $\rho dv = 0$ por ser cero ρ . Eso significa que la energía electrostática de una distribución de carga es un número real característico de la distribución, independiente del volumen de integración, siempre que ese volumen contenga la distribución.

Energía del campo electrostático

A partir de (5) es posible encontrar una fórmula equivalente en la que intervenga el campo electrostático. Si, como venimos haciendo, el medio es un dieléctrico lineal y homogéneo respecto a la permitividad ϵ , se cumple la ecuación de Poisson:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon},$$

y (5) se puede transformar así:

$$W = \frac{1}{2} \int_v V \rho \, dv = \frac{1}{2} \int_v V \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{\epsilon}{2} \int_v V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dv \quad (13)$$

De la identidad

$$\nabla \cdot (VE) = E \cdot \nabla V + V \nabla \cdot E$$

se obtiene

$$V \nabla \cdot E = \nabla \cdot (VE) - E \cdot \nabla V$$

Sustituyendo en (13),

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon}{2} \int_V \nabla \cdot E \, dv = \frac{\epsilon}{2} \int_V \nabla \cdot (VE) \, dv - \frac{\epsilon}{2} \int_V E \cdot \nabla V \, dv = \\ &= \frac{\epsilon}{2} \int_S VE \cdot dS + \frac{\epsilon}{2} \int_V E^2 \, dv \end{aligned} \quad (14)$$

Se ha utilizado el teorema de Gauss de la divergencia. S es la superficie que rodea el volumen v .

El segundo miembro de la última fórmula parece indicar que su valor depende del volumen, pues si se incrementa el volumen, aunque estos incrementos no contengan carga, el campo E creado por la distribución en los puntos de esos incrementos no es, en general, nulo. Esta conclusión contradiría la (5), que, como ya se ha dicho, indica que incrementos de volumen con $\rho = 0$, no alteran el valor de W . Pero solo es una contradicción aparente, pues, si $\rho = 0$, también $\nabla \cdot E = 0$, y la contribución de esa parte de volumen es

$$W = \frac{\epsilon}{2} \int_V \nabla \cdot E \, dv = \frac{\epsilon}{2} \int_S VE \cdot dS + \frac{\epsilon}{2} \int_V E^2 \, dv = 0 \quad (15)$$

Es decir, si en los incrementos de volumen solo existe campo creado por carga exterior a esos incrementos, el incremento de energía electrostática es nulo, y los dos términos del tercer miembro de (15) resultan opuestos. Por tanto, el volumen v puede ser cualquiera, siempre que en los incrementos de v la densidad de carga valga cero.

Teniendo en cuenta lo anterior, supongamos que elegimos la superficie que rodea a la distribución muy alejada de ella. Para mayor facilidad podemos pensar en una superficie esférica de radio R con centro en la distribución: $S = 4\pi R^2$. Como R va a tender a infinito, que el centro esté a una parte u otra de la distribución no influye en el resultado. Además, el campo en los puntos de la superficie es aproximadamente igual al que crea una carga puntual situada en el centro de la superficie esférica de valor igual al de toda la carga de la distribución. Esto es más cierto cuanto más grande sea R . También, debido a la distancia y a la simetría, el campo es perpendicular a esa superficie. Es decir, en cada punto de la superficie esférica

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R^3} R$$

y

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon R}$$

Por tanto,

$$\int_S VE \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon R} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon^2 R}$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_S VE \cdot dS = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{q^2}{4\pi\epsilon^2 R} = 0$$

Entonces la energía de la distribución está dada solo por la fórmula

$$W = \frac{\epsilon}{2} \int_{v \rightarrow \infty} E^2 dv$$

Eso significa que, a medida que la superficie límite se va alejando de la distribución, la contribución de la integral de superficie $\frac{\epsilon}{2} \int_S VE \cdot dS$ al valor de la energía va disminuyendo.

Pero como la energía es la misma, quiere decir que el sumando $\frac{\epsilon}{2} \int_v E^2 dv$ va aumentando en la misma cantidad. El resultado es que, si el volumen en que se evalúa la anterior integral es todo el espacio infinito, entonces

$$W = \frac{\epsilon}{2} \int_{v \rightarrow \infty} E^2 dv \quad (16)$$

es toda la energía de la distribución. E es el campo creado en cada punto del espacio por la carga de la distribución. Si E es el campo electrostático total en cada punto del universo y v el volumen de todo el universo, la anterior fórmula da la energía electrostática de todo el universo. Suele llamarse *energía del campo electrostático* o, también, *energía del campo eléctrico*.

Densidad de energía electrostática

Si es E el campo electrostático en cada punto del espacio, la derivada

$$w = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (17)$$

es única para cada punto, y se llama *densidad de energía electrostática* de ese punto. Es una función escalar que solo depende del valor del campo en cada punto. Se prefiere, por eso, el nombre de *densidad de energía del campo eléctrico* o, mejor, *densidad de energía del campo electrostático* en ese punto.

La densidad de energía nada dice sobre la *localización* de la energía, un concepto nunca utilizado aquí. De hecho, la derivada de (5)

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} V\rho \quad (18)$$

también es una densidad de energía. Resultaría nula en todos los puntos en los que la densidad de carga es nula, mientras (17) no lo es, pues solo depende del módulo del campo E . Es decir, si las derivadas de la energía respecto al volumen informaran de la localización de la energía, darían resultados contradictorios, pues en puntos idénticos las dos derivadas tienen valores distintos³.

³ La localización de la energía es solo una conveniencia nada precisa. Por ejemplo, se dice que cada quilogramo de carbón contiene una determinada energía, que es la de combustión. Pero su obtención requiere la combinación con oxígeno. ¿No está la energía también en el oxígeno? Una gran masa en alto contiene energía potencial, pero al caer, la tierra también cae hacia la masa. ¿No está la energía también en la tierra? La localización de la energía es un convencionalismo práctico: la energía que se desprende al quemar carbón no se supone en el oxígeno debido a la abundancia de este.

Problemas

1.- El radio clásico del electrón es $R = 2.8 \times 10^{-15}$ m. Si consideramos al electrón una esfera de tal radio y densidad volúmica de carga uniforme, hallar su energía electrostática. La carga del electrón es $q = 1.602 \times 10^{-19}$ C.

Solución:

La energía electrostática de una distribución de carga es

$$W = \frac{1}{2} \int_v V \rho \, dv$$

La densidad de carga en cada punto de la esfera de radio R es

$$\rho = \frac{q}{v} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

Y el potencial en un punto de la esfera que dista r del centro es

$$V = k_0 \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} = k_0 \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{3q}{4\pi R^3}}{r} = k_0 \frac{qr^2}{R^3}$$

Como el volumen de la esfera es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$,

$$dv = 4\pi r^2 dr$$

Si se sustituye en la fórmula de la energía, resulta:

$$W = \frac{1}{2} \int_v V \rho \, dv = \frac{1}{2} \int_0^R k_0 \frac{r^2 q}{R^3} \frac{3q}{4\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} k_0 \frac{3q^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{10} k_0 \frac{q^2}{R}$$

Esta es la energía electrostática de cualquier distribución esférica uniforme de carga q y radio R . Nótese que su signo siempre es positivo independientemente del signo de la carga. Para el electrón,

$$W \cong \frac{3}{10} \times 9 \times 10^9 \times \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2}{2.8 \times 10^{-15}} \cong 2.47 \times 10^{-14} \text{ J} = 24.7 \text{ fJ}$$

2.- Debido al lenguaje que se emplea, alguien puede creer que las baterías eléctricas almacenan carga eléctrica, es decir, que son depósitos que acumulan cargas eléctricas⁴. Supongamos que así fuera y que, realmente, están reunidos en una batería de 40 Ah los 40 Ah = 40 A × 3600 s = 144000 C, que es su capacidad. Estimar la energía electrostática que almacenaría una tal batería.

⁴ Las baterías eléctricas son en realidad neutras: su carga eléctrica es cero. Lo que almacenan es energía en los compuestos químicos que contienen: al funcionar la batería como generador, estos compuestos se transforman en otros de menor energía. La pérdida de energía se invierte en hacer circular corriente eléctrica desde el terminal positivo al negativo por el exterior. Cuando la batería se carga es porque otro generador hace circular corriente eléctrica en sentido contrario: desde el terminal positivo al negativo por el interior. Entonces la batería invierte la reacción química y produce el compuesto inicial, que almacena de nuevo energía a razón de *ei* julios por segundo.

La creencia de que una batería almacena carga eléctrica se puede deber al lenguaje empleado cuando se quiere expresar que una batería almacena energía: se dice que se carga. La confusión puede a su vez estar relacionada con la también errónea creencia de que los generadores eléctricos echan cargas a los circuitos.

Solución:

Como es solo una estimación, supondremos que la concentración de la carga q es esférica de densidad volúmica uniforme ρ y radio $R=10\text{cm}$, que da un volumen no muy distinto del de una batería. Así se puede utilizar la fórmula deducida en el problema anterior:

$$W = \frac{3}{10}k_0 \frac{q^2}{R} \cong \frac{3 \times 9 \times 10^9 \times 144000^2}{10 \times 0.1} \cong 5.60 \times 10^{20} \text{J} \cong 1.6 \times 10^8 \text{GWh}$$

Para hacerse una idea de esa cantidad de energía, recordemos que las dos centrales de Aldeadávila suman 1.2 GW de potencia aproximadamente. Si funcionaran ininterrumpidamente a plena potencia, el tiempo que tardarían en producir la energía almacenada en la batería sería

$$t \cong \frac{1.6 \times 10^8}{1.2} \cong 1.3 \times 10^8 \text{h} \cong 15220 \text{años} \cong 152 \text{siglos}$$

Las baterías no almacenan carga eléctrica, sino energía.

3.- Puede ponerse al problema anterior esta objeción: que, si la carga de la batería consistiera en una aglomeración de electrones y se permitiera su dispersión, como la carga de cada electrón no se dispersa, la energía electrostática de los electrones debería restarse de la calculada. La objeción es correcta. Por tanto, para obtener una mayor aproximación de la energía de la batería, réstese a la cantidad anterior la energía electrostática de los electrones que almacenaría.

Solución:

El número de electrones que habría en la batería sería

$$N = \frac{144000}{1.602 \times 10^{-19}} \cong 9 \times 10^{23} \text{ electrones}$$

La energía electrostática de cada electrón, ya hallada, es $2.47 \times 10^{-14} \text{J}$. Por tanto, la energía de los electrones de la batería sería

$$W_e \cong 9 \times 10^{23} \times 2.47 \times 10^{-14} \cong 2.2 \times 10^{10} \text{J}$$

Que es una cantidad muy grande, pero despreciable frente a la de $5.60 \times 10^{20} \text{J}$ hallada en el problema anterior. De hecho, si se hace la resta, resulta

$$5.60 \times 10^{20} - 2.2 \times 10^{10} \cong 5.60 \times 10^{20}$$

La razón es que el minuendo tiene veintiuna cifras y el sustraendo once. Por tanto la resta solo afecta a las once o doce últimas cifras del minuendo.